文章编号:1007-5321(2010)05-0089-05

ZCZ 序列偶集及大容量 ZCZ 序列偶集的构造

肖丽萍，　李卫卫，　许成谦
(燕山大学 信息科学与工程学院，河北 秦皇岛 066004)

摘要：为了降低甚至消除近似同步码分多址(AS-CDMA)系统的多径干扰和多址干扰(MAI),满足系统不断增大的用户容量需要,提出了新的零相关区(ZCZ)序列偶集及大容量 ZCZ 序列偶集的构造方法. 通过对最佳序列偶进行不同的移位,再与一定阶数的酉矩阵进行相关积运算,构造出了近似最优及最优 2 类 ZCZ 序列偶集;通过对已有的 ZCZ 序列偶集进行适当的移位再与相应的酉矩阵进行相关积运算,构造出了更大容量和更长零相关区的 ZCZ 序列偶集. 本文方法适用于二元、三元、四相及多相情况. 构造出的 ZCZ 序列偶集性能优良,在同步误差允许的范围内,能满足多用户 AS-CDMA 系统的要求.

关　键　词：近似同步码分多址；最佳序列偶；零相关区；相关积；酉矩阵
中图分类号：TN911.22　　　**文献标志码**：A

Construction of ZCZ Sequence Pairs Set and ZCZ Sequence Pairs Set with Large Family Size

XIAO Li-ping，　LI Wei-wei，　XU Cheng-qian
(School of Information Science and Engineering，Yanshan University，Hebei Qinhuangdao 066004，China)

Abstract：A New method for constructing set of zero correlation zone (ZCZ) sequence pairs and ZCZ sequence pairs with large family size is proposed. It can be used in approximately-synchronized code-division multiple-access (AS-CDMA) system for the reduction or elimination of the multipath interference and multiple access interference (MAI) of the system. The capacity of increasing users is large with satisfactory. First，almost optimal ZCZ sequence pairs set can be generated from the correlation product of unitary matrix and perfect sequence pairs with difference shift operation. Second，a new method for constructing ZCZ sequence pairs set with larger family size and longer zero correlation zone from a known one is presented，it can be generated from the correlation product of unitary matrix and original ZCZ sequence pairs set with difference shift operation. These methods are applied to binary，ternary quadric-phase and multi-phase case. Performances of ZCZ sequence pairs set constructed by the proposed methods are so good that they can satisfy requirements of AS-CDMA system within the range of allowed time delay chips.

Key words：approximately-synchronized code-division multiple-access；perfect sequence pairs；zero correlation zone；correlation product；unitary matrix

0　引言

AS-CDMA 系统中,在同步误差允许的几个码片范围内,当扩频序列采用 ZCZ 序列时,可降低甚至完全消除多径干扰和多址干扰,进而提高系统容量[1].

为了实现上述 AS-CDMA 系统优越的性能,需

收稿日期：2009-12-16
基金项目：国家自然科学基金项目(60872061)；河北省自然科学基金项目(F2008000855)
作者简介：肖丽萍(1963—)，女，副教授，E-mail：lpxiao@ysu.edu.cn.

要ZCZ较长的ZCZ序列集,理论上对于给定长度的ZCZ序列集,其序列数和ZCZ的长度越大越好,但这些参数受到理论界的限制[2]. 当上式取等号时,称ZCZ序列集达到最优. 对ZCZ序列构造的方法包括基于互补序列[3]、最佳序列[4-5]等,其中基于互补序列的二进制ZCZ序列集的ZCZ远低于理论界,而基于最佳序列的ZCZ序列集的存在空间又受最佳序列的存在长度、数目的限制. 文献[6-8]将序列偶相关理论扩充到ZCZ序列的设计中,构造出了ZCZ序列偶集. 在AS-CDMA系统中,若将ZCZ序列偶中的1个序列作为发送序列,另一个序列作为接收序列,在同步误差范围内,通过相关检测能准确地恢复信号. 本文提出了新的构造ZCZ序列偶集的方法,构造出的ZCZ序列偶集性能优良,可满足更多用户同时通信的要求.

1 基本定义

定义1 设 $\boldsymbol{u}=(u_0,u_1,\cdots,u_{N-1})$ 和 $\boldsymbol{v}=(v_0,v_1,\cdots,v_{N-1})$ 都是周期为 N 的序列,$\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v}$ 组成一个 N 长序列偶,记为 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$,如果序列偶的周期自相关函数满足

$$R_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}(\theta)=\sum_{i=0}^{N-1}u_i v^*_{(i+\theta)\bmod N}=\begin{cases}F\neq 0 & \theta=0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{1}$$

则称 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$ 为最佳序列偶.

定义2 对容量为 M 的序列偶集 $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{C}_i\}$,$i=0,1,\cdots,M-1$,其中 $\boldsymbol{C}_i=(a_n^{(i)},b_n^{(i)})$,$n=0,1,\cdots,N-1$ 为周期为 N 的序列偶,如果该序列偶集中任意2个序列偶 $\boldsymbol{C}_s$ 和 $\boldsymbol{C}_t$ 的相关函数满足:

$$R_{\boldsymbol{C}_s\boldsymbol{C}_t}(\theta)=\sum_{n=0}^{N-1}a_n^{(s)}b^{(t)}_{(n+\theta)\bmod N}=\begin{cases}F\neq 0 & \theta=0,s=t\\ 0 & \theta=0,s\neq t\\ 0 & 1\leqslant|\theta|\leqslant Z\end{cases} \tag{2}$$

则称该序列偶集 $\boldsymbol{C}$ 为ZCZ长度为 Z 的ZCZ序列偶集,记为ZCZ(N,M,Z). 当 $M=1$ 时,ZCZ序列偶集退化为ZCZ序列偶;如果对于所有的 $i=0,1,\cdots,M-1$,$n=0,1,\cdots,N-1$,$a_n^{(i)}=b_n^{(i)}$,ZCZ序列偶集退化为ZCZ序列集.

序列偶 $(a_n^{(i)},b_n^{(i)})$ 的能量定义为

$$E_{\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{b}^i}=\sum_{n=0}^{N-1}a_n^i b_n^{i*} \tag{3}$$

ZCZ序列偶集的理论限为[7]

$$Z\leqslant\frac{N}{M}-1 \tag{4}$$

当式(4)取等号时,称ZCZ序列偶集达到最优.

定义3 设 L 为序列 $\boldsymbol{c}$ 的移位算子,即对任意整数 τ,$L^\tau(\boldsymbol{c})=(c_\tau,\cdots,c_{N-1},\cdots,c_0,\cdots,c_{\tau-1})$,特别地,定义 $L^0(\boldsymbol{c})=\boldsymbol{c}$.

对于任意2个正整数 m 和 n,由带余数除法的性质,总可以把 m 唯一地表示为形如 $m=I(m,n)n+R(m,n)$ 的形式,其中 $I(m,n)$ 和 $R(m,n)$ 分别为 m 除以 n 的商和余数.

定义4 设 $\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{b}_0,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{M-1}\}$ 是一个由 M 个周期为 N 的序列组成的序列集合,其中 $\boldsymbol{b}_i=(b_{i,0},b_{i,1},\cdots,b_{i,N-1})$,$i=0,1,\cdots,M-1$. $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{c}_0,\boldsymbol{c}_1,\cdots,\boldsymbol{c}_{N-1}\}$ 是一个由 N 个周期为 K 的序列组成的集合,其中 $\boldsymbol{c}_i=(c_{i,0},c_{i,1},\cdots,c_{i,K-1})$,$i=0,1,\cdots,N-1$. 令

$$\boldsymbol{d}_p=(d_{p,0},d_{p,1},\cdots,d_{p,NK-1}),\ p=0,1,\cdots,M-1 \tag{5}$$

$$d_{p,q}=b_{p,R(q,N)}c_{R(q,N),I(q,N)},\ q=0,1,\cdots,NK-1 \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{d}_0,\boldsymbol{d}_1,\cdots,\boldsymbol{d}_{M-1}\}$ 是一个由 M 个周期为 NK 的序列组成的集合,称 $\boldsymbol{D}$ 为序列集合 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 的相关积,记作 $\boldsymbol{B}\circ\boldsymbol{C}$.

定义5 设 $\boldsymbol{C}$ 为一个ZCZ(N,M,Z)序列偶集,该序列偶集的性能参数定义为

$$\mu(\boldsymbol{C})=\frac{M(Z+1)}{N} \tag{7}$$

其中 $\mu(\boldsymbol{C})\leqslant 1$. 对于最优ZCZ序列偶集,$\mu(\boldsymbol{C})=1$.

2 基于最佳序列偶的ZCZ序列偶集合构造方法

设 $\boldsymbol{U}$ 为 $l\times l$ 阶酉矩阵,则 $\boldsymbol{U}$ 可表示为

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{\sqrt{l}}\begin{pmatrix}u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,l-1}\\ u_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,l-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ u_{l-1,0} & u_{l-1,1} & \cdots & u_{l-1,l-1}\end{pmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 中元素满足

$$\sum_{k=0}^{l-1}u_{i,k}u^*_{j,k}=\sum_{k=0}^{l-1}u_{k,i}u^*_{k,j}=\begin{cases}l & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{8}$$

定理1 设 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 是一个周期度为 N 的最佳序列偶,$\boldsymbol{U}$ 为 $(N-1)\times(N-1)$ 阶酉矩阵. 对序列 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 进行移位运算得新的序列分别为

$$\boldsymbol{A}=\{L^{N-1}(\boldsymbol{a}),L^{N-2}(\boldsymbol{a}),\cdots,L(\boldsymbol{a})\}$$
$$\boldsymbol{B}=\{L^{N-1}(\boldsymbol{b}),L^{N-2}(\boldsymbol{b}),\cdots,L(\boldsymbol{b})\}$$

令

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\circ\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\circ\boldsymbol{B}$$

记 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{N-2}\}$，$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_{N-2}\}$，则 $\boldsymbol{C}=\{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_{N-2},\boldsymbol{y}_{N-2})\}$ 构成了一个最优 ZCZ$(N(N-1),N-1,N-1)$ 序列偶集.

证明　序列偶集 $\boldsymbol{C}$ 的周期相关函数为

$$R_{x_i,y_j}(\theta)=$$
$$\sum_{k=0}^{N(N-1)} u_{i,R(k,N-1)}a_{N-1-R(k,N)}u^*_{j,R(k+\theta,N-1)}b_{N-1-R(k+\theta,N)}=$$
$$\sum_{k=0}^{N(N-1)} u_{i,R(k,N-1)}u^*_{j,R(k+\theta,N-1)}a_{N-1-R(k,N)}b_{N-1-R(k+\theta,N)}=$$
$$\begin{cases}E_{ab} & \theta=0,i=j\\ 0 & \theta=0,i\neq j\\ 0 & 1\leqslant\theta\leqslant N-1\end{cases}$$

故 $\boldsymbol{C}$ 构成了一个 ZCZ$(N(N-1),N-1,N-1)$ 序列偶集.

性能参数分析如下.

$$\mu(\boldsymbol{C})=\frac{(N-1)(N-1+1)}{N(N-1)}=1 \tag{9}$$

上述方法构造出的序列偶集的容量和 ZCZ 长度都与所采用的酉矩阵的阶数相等，且达到了理论上界，为最优 ZCZ 序列偶集.

例 1　由长度为 5 的三元最佳序列偶 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(++000,++-+-)$ 及 4 阶酉矩阵 $\frac{1}{2}\boldsymbol{H}$（$\boldsymbol{H}$ 为 4 阶 Hardamard 矩阵）

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+&+&+&+\\+&-&+&-\\+&+&-&-\\+&-&-&+\end{pmatrix}$$

按定理 1 可构造出 1 个 ZCZ$(20,4,4)$ 序列偶集，性能参数 $\mu(\boldsymbol{C})=\frac{4\times(4+1)}{20}=1$ 为最优 ZCZ 序列偶集.

$$(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=\frac{1}{2}(000++000++000++000++,$$
$$-+-++-+-++-+-+++-++)$$
$$(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1)=\frac{1}{2}(000-+000+-000-+000+-,$$
$$----+++++-----+++++-)$$
$$(\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{y}_2)=\frac{1}{2}(000-+000++000+-000--,$$
$$-++-+--++++--+-++---)$$
$$(\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{y}_3)=\frac{1}{2}(000++000+-000--000-+,$$
$$--++++--+-++----++-+)$$

定理 2　设 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 为 1 个周期为 N 的最佳序列偶，$\boldsymbol{U}$ 为 $N\times N$ 阶酉矩阵，对序列 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 进行移位运算得新的序列集分别为

$$\boldsymbol{A}=\{\boldsymbol{a},L(\boldsymbol{a}),L^2(\boldsymbol{a}),\cdots,L^{N-1}(\boldsymbol{a})\}$$
$$\boldsymbol{B}=\{\boldsymbol{b},L(\boldsymbol{b}),L^2(\boldsymbol{b}),\cdots,L^{N-1}(\boldsymbol{b})\}$$

令

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{U}\circ\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{U}\circ\boldsymbol{B}$$

记 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_{N-1}\}$，$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{y}_0,\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_{N-1}\}$，其中 $\boldsymbol{x}_i$、$\boldsymbol{y}_i$ 分别为周期为 N^2 的序列，则 $\boldsymbol{C}=\{(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0),(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{y}_1),\cdots,(\boldsymbol{x}_{N-1},\boldsymbol{y}_{N-1})\}$ 构成了一个 ZCZ$(N^2,N,N-2)$ 序列偶集.

此定理的证明与定理 1 类似，故略.

性能参数分析如下.

$$\mu(\boldsymbol{C})=\frac{N(N-2+1)}{N^2}=\frac{N(N-1)}{N^2}=1-\frac{1}{N} \tag{10}$$

由式(10)可以看出，当 N 逐渐增大时，$\mu(\boldsymbol{C})$ 趋近于 1，即序列偶集 $\boldsymbol{C}$ 趋向于最优序列偶集.

按定理 2 构造的 ZCZ 序列偶集的容量达到了所采用的最佳序列偶的长度，ZCZ 为序列偶长度减 2，是几乎最优的 ZCZ 序列偶集. 当序列偶长度 N 增大时，ZCZ 序列偶集趋于最优. 例如，由周期为 8 的最佳序列偶 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 及 8 阶酉矩阵按定理 2 可构造出 ZCZ$(64,8,6)$ 序列偶集合，性能参数为 $\mu(\boldsymbol{C})=\frac{8\times(6+1)}{64}=0.875$.

在实际应用中，需要大系统容量和 ZCZ 长的 ZCZ 序列偶集，下面给出更大容量和更长的 ZCZ 序列偶集的构造方法.

3　大容量 ZCZ 序列偶集的构造

定义 6　2 个序列集 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 是正交的，若满足

$$R_{(X_s,Y_t)}(0)=\begin{cases}E_{X,Y} & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases} \tag{11}$$

对于 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 中任意 2 个序列都成立.

引理 1　如果 $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{C}_i\}$，$i=0,1,\cdots,M-1$ 为 ZCZ(N,M,Z) 序列偶集，其中 $\boldsymbol{C}_i=(x_n^{(i)},y_n^{(i)})$ 为周期为 N 的序列偶，则序列集

$$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{MZ-1}\}=$$
$$\{\boldsymbol{x}^0,L(\boldsymbol{x}^0),\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{x}^0),\cdots,\boldsymbol{x}^{M-1},\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{x}^{M-1})\}$$

与序列集

$$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{Y}_0,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{MZ-1}\}=$$
$$\{\boldsymbol{y},L(\boldsymbol{y}^0),\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{y}^0),\cdots,\boldsymbol{y}^{M-1},\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{y}^{M-1})\}$$

相互正交,且

$$R_{X_s,Y_{s-1}}(1)=\begin{cases}E_{X,Y} & \tau_1-\tau_2=1, i=j\\ 0 & \tau_1-\tau_2=1, i\neq j\end{cases} \tag{12}$$

其中,$0\leqslant s\leqslant MZ-1$; $0\leqslant i,j\leqslant M-1$; $0\leqslant \tau_1\leqslant Z-1$; $0\leqslant\tau_2\leqslant Z-1$.

证明 令 $\boldsymbol{X}_s=L^{\tau_1}(\boldsymbol{x}^i)$, $\boldsymbol{Y}_t=L^{\tau_2}(\boldsymbol{y}^j)$, $0\leqslant s,t\leqslant MZ-1$, $0\leqslant i,j\leqslant M-1$,则序列 $\boldsymbol{X}_s$ 和 $\boldsymbol{Y}_t$ 的周期相关函数为

$$R_{X_s,Y_t}(\theta)=R_{L^{\tau_1}(x^i),L^{\tau_2}(y^j)}(\theta)=\sum_{k=0}^{N-1}x^i_{k+\tau_1}y^{j*}_{k+\tau_2+\theta}=\sum_{k=0}^{N-1}x^i_k y^{j*}_{k+\tau_2-\tau_1+\theta}$$

当 $\theta=0$ 时

$$R_{X_s,Y_t}(0)=\sum_{k=0}^{N-1}x^i_k y^{j*}_{k+\tau_2-\tau_1}=\begin{cases}E_{X,Y} & \tau_1=\tau_2, i=j\\ 0 & \tau_1=\tau_2, i\neq j\\ 0 & \tau_1\neq\tau_2, i\neq j\end{cases} \tag{13}$$

又由于 s、t 可表示为 $s=iZ+\tau_1$, $t=jZ+\tau_2$, $0\leqslant\tau_1\leqslant Z-1$, $0\leqslant\tau_2\leqslant Z-1$,式(13)可写成

$$R_{X_s,Y_t}(0)=\begin{cases}E_{X,Y} & s=t\\ 0 & s\neq t\end{cases}$$

即序列集 $\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 正交.

当 $\theta=1$ 时

$$R_{X_s,Y_t}(1)=\sum_{k=0}^{N-1}x^i_k y^{j*}_{k+\tau_2-\tau_1+1}=\begin{cases}E_{X,Y} & \tau_1-\tau_2=1, i=j\\ 0 & \tau_1-\tau_2=1, i\neq j\\ 0 & \tau_1-\tau_2\neq 1, i\neq j\end{cases} \tag{14}$$

又由于 s、t 可表示为 $s=iZ+\tau_1$, $t=jZ+\tau_2$, $0\leqslant\tau_1\leqslant Z-1$, $0\leqslant\tau_2\leqslant Z-1$,式(14)可写成

$$R_{X_s,Y_{s-1}}(1)=\begin{cases}E_{X,Y} & \tau_1-\tau_2=1, i=j\\ 0 & \tau_1-\tau_2=1, i\neq j\end{cases}$$

证毕.

定理 3 设 $\boldsymbol{C}=\{\boldsymbol{C}_i\}$ 为 ZCZ(N,M,Z) 序列偶集,$\boldsymbol{C}_i=(x_n^{(i)},y_n^{(i)})$ 为周期为 N 的 ZCZ 序列偶,令

$$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X}_0,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_{MZ-1}\}=\{\boldsymbol{x}^0,L(\boldsymbol{x}^0),\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{x}^0),\cdots,\boldsymbol{x}^{M-1},\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{x}^{M-1})\}$$

$$\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{Y}_0,\boldsymbol{Y}_1,\cdots,\boldsymbol{Y}_{MZ-1}\}=\{\boldsymbol{y}^0,L(\boldsymbol{y}^0),\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{y}^0),\cdots,\boldsymbol{y}^{M-1},\cdots,L^{Z-1}(\boldsymbol{y}^{M-1})\}$$

$\boldsymbol{U}$ 为 $MZ\times MZ$ 阶酉矩阵,做相关积

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{U}\circ\boldsymbol{X},\ \boldsymbol{F}=\boldsymbol{U}\circ\boldsymbol{Y}$$

记 $\boldsymbol{E}=\{\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{MZ-1}\}$, $\boldsymbol{F}=\{\boldsymbol{f}_0,\boldsymbol{f}_1,\cdots,\boldsymbol{f}_{MZ-1}\}$,则可以构造出 1 个新的 ZCZ 序列偶集 $\boldsymbol{D}=((\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{f}_0),(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{f}_1),\cdots,(\boldsymbol{e}_{MZ-1},\boldsymbol{f}_{MZ-1}))$,且 $\boldsymbol{D}$ 为 ZCZ(MZN,MZ,T) 序列偶集,其 ZCZ 的长度 $T\geqslant MZ-2$. 若序列偶集 $\boldsymbol{C}$ 中的序列偶都具有相同的能量 $E_{\boldsymbol{C}}$,则序列偶集 $\boldsymbol{D}$ 中的序列偶的能量也相同,且 $E_{\boldsymbol{D}}=E_{\boldsymbol{C}}$.

证明 设 $MZ=K$, $0\leqslant r<K$, $0\leqslant m<K$, $0\leqslant n<N$, $\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{F}$ 中的序列元素可分别表示为

$$e^r_{m+Kn}=u_{r,m}x^m_n$$
$$f^r_{m+Kn}=u_{r,m}y^m_n$$

设 $0\leqslant s,t\leqslant MZ-1$,序列偶集 $\boldsymbol{D}$ 的周期相关函数为

$$R_{e_s,f_t}(0)=\sum_{k=0}^{KN-1}e^s_k f^{t*}_k=\sum_{m=0}^{K-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^s_{m+Kn}f^t_{m+Kn}\right)=\sum_{m=0}^{K-1}u_{s,m}u_{t,m}R_{X_sY_t}(0)=\begin{cases}E_{X,Y} & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{15}$$

当 $0<\theta<K$ 时,

$$\begin{aligned}R_{e_s,f_t}(\theta)&=\sum_{k=0}^{KN-1}e^s_k f^{t*}_{k+\theta}=\sum_{m=0}^{K-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^s_{m+Kn}f^t_{m+Kn+\theta}\right)=\\&\sum_{m=0}^{K-\theta-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^s_{m+Kn}f^t_{m+Kn+\theta}\right)+\sum_{m=K-\theta}^{K-1}\left(\sum_{n=0}^{N-1}e^s_{m+Kn}f^t_{m+\theta-K+K(n+1)}\right)=\\&\sum_{m=0}^{K-\theta-1}u_{s,m}u_{t,m+\theta}R_{X_m,Y_{m+\theta}}(0)+\sum_{m=K-\theta}^{K-1}u_{s,m}u_{t,m+\theta-K}R_{X_m,Y_{m+\theta-K}}(1)\end{aligned} \tag{16}$$

当 $\theta=K-1$ 时,

$$R_{e_s,f_t}(K-1)=u_{s,0}u^*_{t,K-1}R_{X_0,Y_{K-1}}(0)+\sum_{m=1}^{K-1}u_{s,m}u^*_{t,m-1}R_{X_m,Y_{m-1}}(1) \tag{17}$$

由引理 1 可见,第 2 项存在非零点.

当 $1\leqslant\theta\leqslant K-2$ 时,设 $\theta=K-l$, $2\leqslant l\leqslant K-1$,

$$\begin{aligned}R_{e_s,f_t}(\theta)&=\sum_{m=0}^{K-\theta-1}u_{s,m}u^*_{t,m+\theta}R_{X_m,Y_{m+\theta}}(0)+\sum_{m=K-\theta}^{K-1}u_{s,m}u^*_{t,m+\theta-K}R_{X_m,Y_{m+\theta-K}}(1)=\\&\sum_{m=0}^{l-1}u_{s,m}u^*_{t,m+K-l}R_{X_m,Y_{m+K-l}}(0)+\sum_{m=l}^{K-1}u_{s,m}u^*_{t,m+l}R_{X_m,Y_{m+l}}(1)\end{aligned} \tag{18}$$

由引理 1 知 $\boldsymbol{X}_s$ 与 $\boldsymbol{Y}_t$ 相互正交,$0\leqslant s,t\leqslant M-1$,故式(18)右边第 1 项为 0,而第 2 项在 $2\leqslant l\leqslant K-1$

时也为 0.

综上所述,得到

$$R_{e_s,f_t}(\theta)=\begin{cases}E_{XY} & \theta=0,s=t\\0 & \theta=0,s\neq t\\0 & 1\leqslant\theta\leqslant MZ-2\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{D}$ 为 ZCZ(MZN,MZ,T)序列偶集,且 $T\geqslant MZ-2$.

证毕.

性能参数分析如下.

$$\mu(\boldsymbol{D})=\frac{MZ(T+1)}{MZN}\geqslant\mu(\boldsymbol{C})-\frac{M+1}{N}\qquad(19)$$

由 ZCZ(32,4,6)序列偶集[8]及 24 阶酉矩阵 $\frac{1}{\sqrt{24}}\boldsymbol{H}$($\boldsymbol{H}$ 为 24 阶 Hardamard 矩阵)按定理 3 可构造出 ZCZ(768,24,22)序列偶集,性能参数 $\mu(\boldsymbol{D})=\frac{24\times(22+1)}{768}\approx0.844$. 构造的 ZCZ 序列偶集的周期、容量和 ZCZ 长度较初始的 ZCZ 序列偶集都得到扩展,且经验证,具有良好的自相关性和互相关性,适用于用户数量多、干扰大的 AS-CDMA 系统,并可进一步降低对系统同步的要求.

推论　设 $\boldsymbol{U}^{(i)}$($1\leqslant i\leqslant n$)为 n 个 $MZ\times MZ$ 阶酉矩阵,$\boldsymbol{E}^{(n)}$ 是 $\boldsymbol{U}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{E}^{(n-1)}$ 的相关积,$\boldsymbol{E}^{(0)}=\boldsymbol{X}$,$\boldsymbol{F}^{(n)}$ 是 $\boldsymbol{U}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{F}^{(n-1)}$ 的相关积,$\boldsymbol{F}^{(0)}=\boldsymbol{Y}$,即

$$\boldsymbol{E}^{(n)}=\boldsymbol{U}^{(n)}\circ(\boldsymbol{U}^{(n-1)}\circ,\cdots,\circ(\boldsymbol{U}^{(1)}\circ\boldsymbol{X}))$$
$$\boldsymbol{F}^{(n)}=\boldsymbol{U}^{(n)}\circ(\boldsymbol{U}^{(n-1)}\circ,\cdots,\circ(\boldsymbol{U}^{(1)}\circ\boldsymbol{Y}))$$

$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$ 的取值同定理 3,则序列集 $\boldsymbol{E}^{(n)}$ 和 $\boldsymbol{F}^{(n)}$ 组成了 ZCZ($M^nZ^nN,MZ,T(\boldsymbol{D}^{(n)})$)序列偶集,且 $T(\boldsymbol{D}^{(n)})\geqslant(MZ)^{n-1}(MZ-2)$.

性能参数分析如下.

$$\mu(\boldsymbol{D}^{(n)})=\frac{((MZ)^{n-1}(MZ-2)+1)MZ}{M^nZ^nN}\geqslant$$
$$\mu(\boldsymbol{C})+\frac{1}{N(MZ)^{n-1}}-\frac{M+2}{N}$$

上述结论可通过对定理 3 采用数学归纳法证得. 由此推论可构造出一系列更长 ZCZ 的 ZCZ 序列偶集.

4　结束语

首先给出了 2 种 ZCZ 序列偶集的构造方法,采用最佳序列偶的移位序列和酉矩阵,利用相关积运算,可构造出准最优及最优 ZCZ 序列偶集,还给出了一类由已知 ZCZ 序列偶集构造更大容量、更长 ZCZ 的 ZCZ 序列偶集的方法. 通过选择不同元数的最佳序列偶或 ZCZ 序列偶集及不同形式的酉矩阵(实数或虚数),利用上述方法可构造出二元、三元、四相及多相 ZCZ 序列偶集. 由于酉矩阵大量存在,相关积运算简单,上述构造方法简单易行. 本文结果进一步丰富了 ZCZ 序列偶集理论,为实际的工程应用提供了更多选择.

参考文献:

[1]　Fan Pingzhi, Suehiro N, Kuroyanagi N, et al. Class of binary sequences with zero correlation zone [J]. IEEE Electronic Letters, 1999, 35(10): 777-779.

[2]　Tang Xiaohu, Fan Pingzhi, Matsufuji S. Lower bounds on the maximum correlation of sequences set with low or zero correlation zone [J]. Electronics Letters, 2000, 36(6): 551-552.

[3]　Han Chenggao, Hashimoto T, Suehiro N. A novel construction method of zero-correlation zone sequences based on complete complementary codes [C] // ISIT 2008. Toronto: IEEE Press, 2008: 1931-1934.

[4]　Peng Daiyuan, Fan Pingzhi, Suehiro N. Construction of sequences with large zero correlation zone [J]. IEICE Trans on Fundamentals of Electron, Commun and Comput Sci, 2005, E88-A(11): 3256-3259.

[5]　左会娟, 佟鑫, 温巧燕. 由完备序列构造零相关区序列集的方法[J]. 北京邮电大学学报,2008, 31(4): 122-125.
Zuo Huijuan, Tong Xin, Wen Qiaoyan. Constructions of ZCZ sequence set from a perfect sequence[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2008, 31(4): 122-125.

[6]　Matsufuji S. Families of sequence pairs with zero correlation zone [J]. IEICE Trans on Fund of Electron Commun and Comput Sci, 2006, E89-A(11): 3013-3017.

[7]　梁清梅, 刘金明, 许成谦. 一种达到理论上限的新型扩频序列集[J]. 无线电工程,2006, 36(10): 27-30.
Liang Qingmei, Liu Jinming, Xu Chengqian. A novel spread spectrum sequence set up to upper bound of theory[J]. Radio Engineering of China, 2006, 36(10): 27-30.

[8]　Gao Junping, Li Qi, Dai Junfeng. A new construction technique of ZCZ sequence pairs set [C] // CCWMSN 2007. Shanghai: [s. n.], 2007: 970-973.