

文章编号:1007-5321(2023)05-0028-07

DOI:10.13190/j.jbupt.2022-168

# 基于混合熵的分数阶归一化子带自适应滤波算法

火元莲<sup>1</sup>, 丁瑞博<sup>1</sup>, 齐永锋<sup>2</sup>, 脱丽华<sup>1</sup>

(1. 西北师范大学 物理与电子工程学院, 兰州 730070; 2. 西北师范大学 计算机科学与工程学院, 兰州 730070)

**摘要:** 为了改善非高斯噪声环境下归一化子带自适应滤波算法的滤波性能, 引入了最大混合相关熵准则和分数阶微分的概念。一方面, 利用最大混合相关熵准则的鲁棒性, 有效地减小了异常噪声对算法性能的影响; 另一方面, 在权重更新的过程中, 通过引入分数阶微分部分, 并以加权的形式考虑数据整体信息, 更准确地描述了实际系统, 从而提高了算法的滤波性能, 可将这一改进后的算法应用于非高斯冲击噪声和有色噪声环境下的系统辨识和非线性信道均衡。通过仿真实验结果可以看出, 与已有的鲁棒算法相比, 所提算法具有更强的鲁棒性和更高的系统跟踪和估计能力。

**关 键 词:** 最大混合相关熵准则; 分数阶微分; 非高斯噪声; 系统辨识

中图分类号: TN713

文献标志码: A

## Fractional Normalized Subband Adaptive Filtering Algorithm Based on Mixture Correntropy

HUO Yuanlian<sup>1</sup>, DING Ruibo<sup>1</sup>, QI Yongfeng<sup>2</sup>, TUO Lihua<sup>1</sup>

(1. College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;

2. College of Computer Science and Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

**Abstract:** In order to improve the filtering performance of the normalized subband adaptive filter (NSAF) in a non-Gaussian noise environment, the maximum mixture correntropy criterion and fractional-order differentiation are applied to the NSAF algorithm. On the one hand, the robustness of the maximum mixture correntropy criterion is used to effectively suppress the effect of anomalous noise values on the performance of the algorithm. On the other hand, to describe the actual system more accurately, a fractional-order differentiation component is added to the weight update. The proposed algorithm is applied to system identification and nonlinear channel equalization in a non-Gaussian interference noise and colored noise. Simulation results show that the proposed algorithm has stronger robustness and better system tracking and estimation capability compared with existing robust algorithms.

**Key words:** maximum mixture correntropy criterion; fractional-order derivative; non-Gaussian impulsive interference; system identification

自适应滤波器是一种通用的函数逼近器, 它可以很好地实现高性能的线性滤波, 广泛应用于系统辨识、信道均衡、回波消除和图像恢复等领域<sup>[1]</sup>。代价函数对于自适应滤波器的设计至关重要, 一般

来说, 需要针对不同的噪声环境构造适当的代价函数。基于最小均方误差准则建立的最小均方 (LMS, least mean square) 算法和归一化 LMS (NLMS, normalized least mean square) 算法因其实现简单和

计算复杂度低而备受欢迎。然而,当输入信号高度相关时,该类算法的收敛速度较慢,而且在非高斯噪声环境下鲁棒性较差。解决上述问题可采用子带自适应滤波器(SAF, subband adaptive filter)。用 SAF 将有色信号划分成并行处理的子带信号,以实现有色信号的去相关性,从而提高收敛性能,降低对信号处理的要求<sup>[2-8]</sup>。相比于 NLMS 算法,用归一化子带自适应滤波(NSAF, normalized subband adaptive filter)算法在几乎相同的计算复杂度下可提供更快的收敛速度。

与传统的均方误差准则不同,最大相关熵准则(MCC, maximum correntropy criterion)是一种新的鲁棒最优准则,已成功应用于 SAF 中<sup>[9]</sup>。由于在适当的核宽度下,相关熵对异常值具有弹性,所以在脉冲干扰环境中,MCC 成为一个很好的选择。然而,在实际问题中,数据在特征空间中的分布往往是有差异、异常、非平坦的。因此,当面对更复杂的数据,特别是面对核参数不敏感的数据时,用单个高斯核函数可能是不够的。而在最大混合相关熵准则(MMCC, maximum mixture correntropy criterion)<sup>[10]</sup>,即一个混合熵使用 2 个不同核参数中,采用了混合熵作为全局衡量标准,对估计误差的所有偶次幂进行线性组合,且 MMCC 的泰勒展开式中包含误差向量的高阶统计量。利用 MMCC 的特性可以提高算法的鲁棒性。

基于上述考虑,将 MMCC 与 NSAF 算法相结合来构造新的代价函数,通过选择并优化新代价函数中的混合参数和核宽参数,可获得对脉冲干扰更好的抑制效果。对于复杂系统的建模问题,分数阶微积分模型比整数阶微积分模型更准确,还能包含系统的遗忘和记忆效应。同时,考虑到分数阶微积分是整数阶微积分的推广,能更准确地描述系统的一些物理特性。在滤波算法中应用分数阶微积分可获得更好的动态性能、鲁棒性和滤波精度。因此,在算法中采用了基于分数阶的梯度更新方法。最后,通过对算法在不同噪声环境下进行系统辨识、跟踪和非线性信道均衡等问题的评估,再对所提子带自适应滤波算法的性能进行评估。

## 1 NSAF 算法的基础理论

### 1.1 NSAF 算法

一个未知系统的期望信号为

$$d(n) = \mathbf{u}^T(n) \boldsymbol{\omega}_0 + \eta(n) \quad (1)$$

其中: $\boldsymbol{\omega}_0$  为待辨识的  $M$  维脉冲响应; $n$  为原始序列; $\mathbf{u}(n) = [u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)]^T$  为输入信号向量; $\eta(n) = v(n) + \theta(n)$  为加性噪声,包括背景噪声  $v(n)$  和脉冲噪声干扰  $\theta(n)$ 。图 1 所示为 SAF 的多带结构。利用分析滤波器组  $\{H_i(z), i \in [0, N-1]\}$  分别将期望信号  $d(n)$  和输入信号  $u(n)$  分成各自的子带信号  $d_i(n)$  和  $u_i(n)$ 。通过自适应

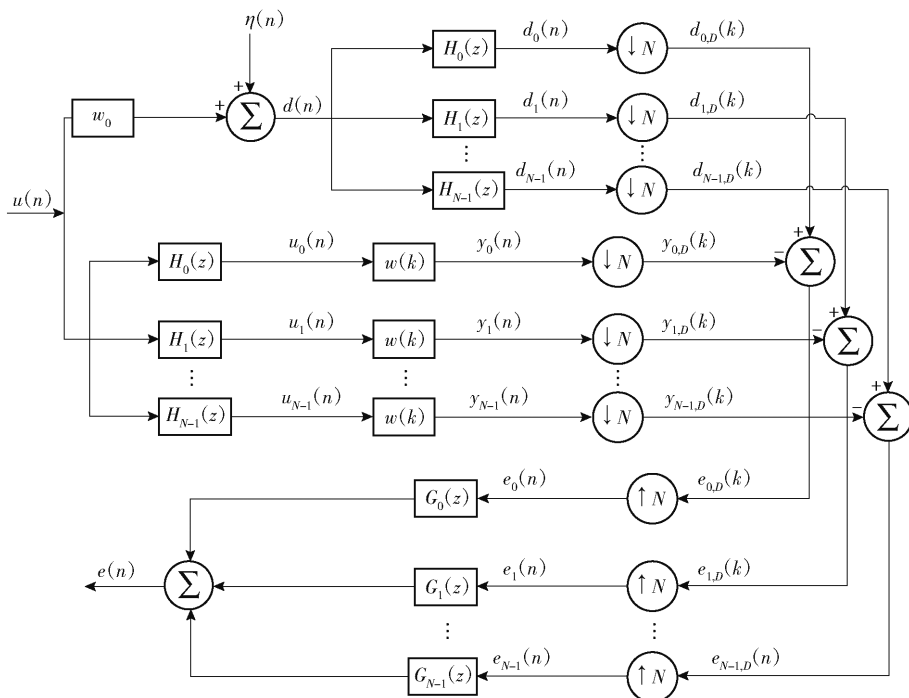


图 1 SAF 的多带结构

滤波器得到输出信号  $y_i(n)$ ; 然后经抽取得到  $y_{i,D}(k)$ 。第  $i$  个子带输出信号为  $y_{i,D}(k) = \mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{w}(k)$ , 其中  $\mathbf{w}(k)$  为自适应滤波器的抽头权重向量,  $k$  为抽取序列。第  $i$  个子带输出误差为

$$e_{i,D}(k) = d_{i,D}(k) - y_{i,D}(k) = d_{i,D}(k) - \mathbf{u}_i^T(k) \mathbf{w}(k) \quad (2)$$

其中:  $d_{i,D}(k) = d_i(kN)$ ,  $N$  为子带数。

NSAF 算法的代价函数<sup>[8]</sup>为

$$J(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \quad (3)$$

其中  $\|\cdot\|^2$  为向量的 L2 范数。基于梯度下降理论, NSAF 算法的权重更新方程为

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \mu \sum_{i=0}^{N-1} \frac{e_{i,D}(k) \mathbf{u}_i(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \quad (4)$$

其中  $\mu$  为步长。

## 1.2 分数阶微积分

近几年, 因为将分数阶微积分作为整数阶微积分的扩展形式, 可以更准确地描述系统的某些物理特性。用分数阶微积分所描述的系统更接近实际系统, 因此在学术界备受瞩目。将分数阶微积分应用于滤波算法中可获得更好的动态性能、鲁棒性和更高的滤波精度。对于分数阶微分的定义有 GL (Grunwald-Letnikov) 和 RL (Riemann-Liouville)<sup>[11-12]</sup>。对于函数  $f(t)$ , RL 分数阶的定义为

$$I^v f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{v-1} f(\tau) d\tau \quad (5)$$

其中:  $I^v$  为  $v$  阶积分,  $v \in (0, 1)$ 。对于  $x-v+1 > 0$ , 则

$$\Gamma(x-v+1) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-v} dt \quad (6)$$

且

$$\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-v+1)} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-v+1) \quad (7)$$

同样,  $v$  阶 RL 微分的描述为

$$(D^v f)(t) = \left( \frac{d}{dt} \right)^m (I^{m-v} f)(t), \quad m-1 < v < m \quad (8)$$

其中:  $D^v$  为  $v$  阶微分,  $m$  为整数。将式(5)代入式(8)得

$$(D^v f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left( \frac{d}{dt} \right)^m \int_0^t (t-\tau)^{m-v-1} f(\tau) d\tau \quad (9)$$

以函数  $f(t) = (t-b)^\alpha$  为例, 它的分数阶导数表示为

$$D^v(t-b)^\alpha = \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-v)} (t-b)^{\alpha-v} \quad (10)$$

其中:  $b$  和  $\alpha$  均为常数, 取值为 1。

## 2 所提算法

### 2.1 基于 MMCC 的代价函数

由于高斯核具有逼近能力, 所以在相关熵中, 使用最广泛的核函数是高斯核函数。基于最大相关熵的代价函数为<sup>[8]</sup>

$$J_{\text{MCC-SAF}}(k) = \frac{1}{2\beta} \sum_{i=0}^{N-1} \exp \left[ -\beta \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \right] \quad (11)$$

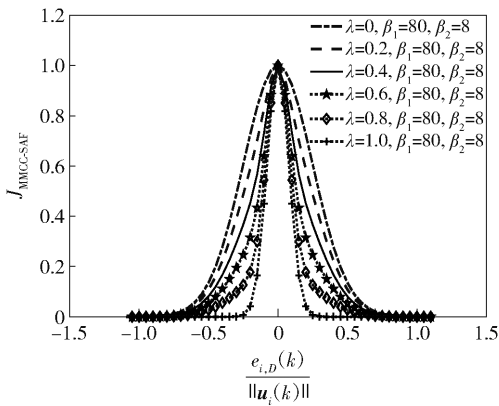
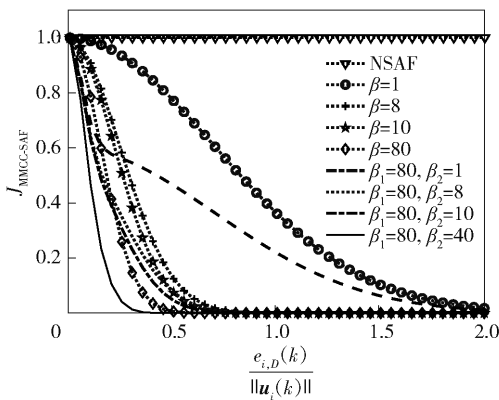
其中  $\beta$  为与内核宽度  $\sigma$  相关联的核参数。在实际应用中, 混合相关熵比具有单一高斯核的相关熵更具优势, 同时, 为了加快在有色输入信号中的收敛速度和抗脉冲环境的鲁棒性, 将 MMCC 和 NSAF 相结合来构造一个新的代价函数, 即

$$J(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \lambda \frac{1}{2\beta_1} \exp \left[ -\beta_1 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \right] + (1-\lambda) \frac{1}{2\beta_2} \exp \left[ -\beta_2 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|\mathbf{u}_i(k)\|^2} \right] \right) \quad (12)$$

其中:  $\beta_1$  和  $\beta_2$  为对应于不同内核宽度  $\sigma$  时的核参数,  $\beta_1 = \frac{1}{2\sigma_1^2}$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2\sigma_2^2}$ ,  $\sigma_1$  为大的核宽度,  $\sigma_2$  为小的核宽度;  $\lambda$  为将大核宽度与小核宽度进行组合的混合参数, 主要用于控制算法的收敛速度和稳态误差性能, 取值为  $0 \leq \lambda \leq 1$ 。

图2所示为不同  $\lambda$  值对代价函数的影响。当  $\lambda=0$  或者  $\lambda=1$  时, 混合高斯函数简化为单一的高斯核函数。图3所示为不同的  $\beta$  值 (其中  $\lambda=0.5$ ) 对代价函数的影响。可见, 无论脉冲何时发生,  $e_{i,D}(k)/\|\mathbf{u}_i(k)\|$  都具有较大的幅值, 但是相应的代价函数都能将其迅速减小到非常小的值, 并且用混合核函数 (实线) 进行处理比用单一核函数处理更佳, 尤其在误差较大时使用混合核函数可加快梯度下降速度, 从而提高收敛速度。当存在脉冲干扰时, 该代价函数的梯度趋于 0, 有效地抑制了算法权重的更新。同时, 大量研究表明, 较小的步长可以抑制由异常值 (如脉冲干扰) 对抽头权重向量更新的影响。因此, 通过在代价函数中使用混合高斯函数, 使所提算法能够在具有较强鲁棒性 (低稳态误差) 时提高收敛速度。

值得注意的是, 用泰勒公式展开代价函数后包

图2 不同 $\lambda$ 参数下的混合高斯函数图3 不同 $\beta$ 值对代价函数的影响

含了误差  $e_{i,D}(k)$  的高阶统计量[见式(13)]。因此,在所提算法中可以利用误差这一特性获得更快的收敛速度和更低的稳态误差,从而进一步说明所构造的代价函数对脉冲干扰具有一定的鲁棒性。

$$\exp\left(-\beta \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right) = 1 + \frac{-\beta e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{-\beta e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{-\beta e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right)^3 + \dots \quad (13)$$

取式(12)相对于  $w(k)$  的随机梯度,得

$$\nabla J(k) = \sum_{i=0}^{N-1} \left( \lambda \exp\left[-\beta_1 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] + (1-\lambda) \exp\left[-\beta_2 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] \right) \times \frac{e_{i,D}(k) u_i(k)}{\|u_i(k)\|^2} \quad (14)$$

因此,基于随机梯度法的最大混合相关熵准则子带自适应滤波(MMCC-SAF, maximum mixture correntropy criterion subband adaptive filter)算法的权重更新方程为

$$w(k+1) = w(k) + u \nabla J(k) = w(k) + u \sum_{i=0}^{N-1} \left( \lambda \exp\left[-\beta_1 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] + (1-\lambda) \exp\left[-\beta_2 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] \right) \times \frac{e_{i,D}(k) u_i(k)}{\|u_i(k)\|^2} \quad (15)$$

## 2.2 基于分数阶微分的梯度更新

在采用随机梯度更新权重的自适应滤波算法中,需要设置一个步长参数  $u$  来确保算法的收敛性能,且算法对步长的取值大小较为敏感。增大步长可以加快算法的收敛速度,但会增大稳态误差。减少步长可以提高算法的稳定性,但会使收敛速度变慢。但是,基于分数阶的梯度更新方法可以在增加一定计算复杂度的前提下提高滤波性能。分数阶微积分以加权的形式体现了函数的整体信息,因此能更准确地描述实际系统的动态响应,最终实现预期的鲁棒性、稳定性和滤波精度。基于这一理论,可以在 MMCC-SAF 算法的基础上采用分数阶梯度更新方法,即在一阶微分的基础上增加一项分数阶微分<sup>[10-11]</sup>。因此,基于混合熵的分数阶归一化子带自适应滤波(FMMCC-SAF, fractional-order maximum mixture correntropy criterion subband adaptive filter)算法的权重更新方程可表示为

$$w(k+1) = w(k) + \mu_1 \left( \frac{\partial J(k)}{\partial w} \right) + \mu_2 \left( \frac{\partial}{\partial w} \right)^v J(k) = w(k) + f_1(k) + f_2(k) \quad (16)$$

其中

$$f_1(k) = \mu_1 \sum_{i=0}^{N-1} \left( \lambda \exp\left[-\beta_1 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] + (1-\lambda) \exp\left[-\beta_2 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] \right) \times \frac{e_{i,D}(k) u_i(k)}{\|u_i(k)\|^2} \quad (17)$$

$$f_2(k) = \mu_2 \sum_{i=0}^{N-1} \left( \lambda \exp\left[-\beta_1 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] + (1-\lambda) \exp\left[-\beta_2 \frac{e_{i,D}^2(k)}{\|u_i(k)\|^2}\right] \right) \times \frac{e_{i,D}(k) u_i(k)}{\|u_i(k)\|^2} \odot \left[ \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\nu)} w^{1-\nu}(k) \right] \quad (18)$$

其中 $\odot$ 表示点积。从式(16)可以看出,与单一高斯核函数的子带算法相比,FMMCC-SAF 算法更灵活,可通过调节参数  $\mu_1, \mu_2, \lambda$  和  $\nu$  进一步减小对权重向



量更新的影响,使得算法性能更优。采用归一化均方偏差(NMSD, normalized mean square deviation)作为衡量算法性能指标,即

$$R_{\text{NMSD}} = 10 \lg \left( \frac{\|\boldsymbol{\omega}_0 - \boldsymbol{\omega}\|_2^2}{\|\boldsymbol{\omega}_0\|_2^2} \right) \quad (19)$$

图 4 示出了不同  $v$  值对 FMMCC-SAF 算法的影响。可以看出,存在脉冲干扰时,随着参数  $v$  取值的不断变大,在几乎相同的收敛速度(迭代  $1 \times 10^4$  次左右)下, FMMCC-SAF 算法的稳态误差明显增大。但是通过对比  $v = 0.25$  和  $v = 0.5$  两条曲线不难发现:随着  $v$  的增大,算法的稳态性能几乎不再提升,因此设置  $v = 0.5$ 。

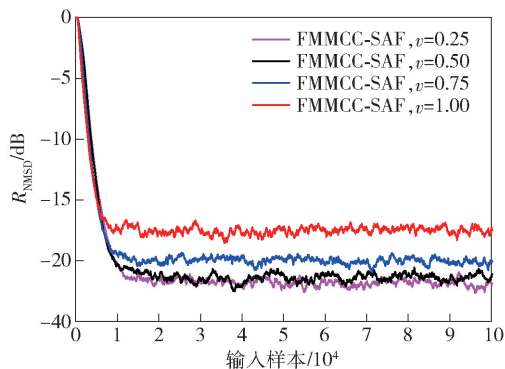


图 4 不同  $v$  值下的 NMSD

### 3 仿真实验

使用蒙特卡洛方法(平均 50 次独立运行)来评估所提算法的性能。在仿真实验中,将高斯白噪声作为背景噪声  $v(n)$  加入未知系统,选取信噪比为 30 dB;使用具有 60 dB 阻带衰减、 $N = 4$  的余弦调制滤波器组。

#### 3.1 系统辨识场景的应用分析

采用系统辨识问题验证所提算法的有效性。在系统辨识场景中,高斯白噪声通过一阶自回归系统 (AR(1), first-order autoregressive)  $G(z) = 1/(1 - 0.9z^{-1})$  产生有色输入信号  $u(n)$  [5-9], 未知系统中  $\boldsymbol{\omega}_0$  是长度为 512 的真实声学脉冲响应。 $\theta(n)$  为一个伯努利-高斯过程,即  $\theta(n) = c(n)A(n)$  [8-9], 其中:  $c(n)$  为  $n$  个伯努利过程,其概率密度函数描述为  $p\{c(n) = 1\} = P_r$  和  $p\{c(n) = 0\} = 1 - P_r$ ,  $P_r$  为发生冲击噪声干扰的概率;  $A(n)$  为一个均值为 0, 方差为  $\sigma_A^2 = 100E[(\boldsymbol{u}^T(n)\boldsymbol{\omega}_0)^2]$  的高斯过程。在上述非高斯冲击噪声环境下,将所提算法与其他算法进行了性能对比。为了保证比较过程的公平性,所有算

法涉及的步长参数值均依据文献[9]给出的最优参考值。

#### 3.1.1 非高斯冲击噪声环境下的性能比较

图 5 所示为 NSAF, SSAF (sign subband adaptive filter), MCC-SAF, AP-SSAF (affine projection-SSAF) 以及所提 MMCC-SAF 和 FMMCC-SAF 算法在冲击噪声干扰下的收敛性能,其中  $P_r = 1\%$ 。由图 5 可见,只有基于 L2 范数的 NSAF 算法是严重发散的。基于 L1 范数优化导出的 SSAF 和 AP-SSAF 算法对脉冲干扰均具有鲁棒性,但它们的缺点是收敛速度慢, AP-SSAF 算法的计算复杂度较高。尽管用 MCC-SAF 算法提高了收敛速度,但稳态误差较大,而 MMCC-SAF, FMMCC-SAF 算法在与 MCC-SAF 算法相接近的收敛速度下,具有更低的稳态误差。这是由于在代价函数中利用混合熵可以更好地抑制脉冲干扰。在环境中存在干扰的情况下代价函数的一阶导数趋于 0,使得权重停止更新,  $\boldsymbol{w}(k+1) \approx \boldsymbol{w}(k)$ , 提高了在脉冲干扰环境中的性能。因此,构造的代价函数为 FMMCC-SAF 算法提供了良好的鲁棒性,使得其稳态误差较低。

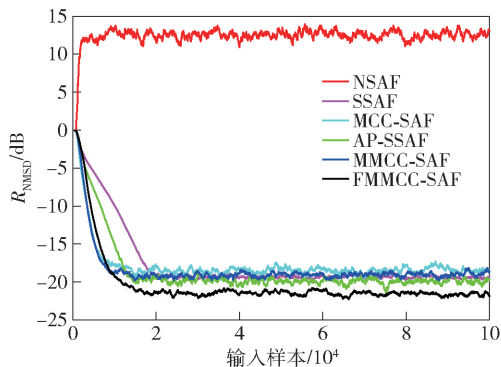


图 5 在冲击噪声下不同算法的 NMSD

#### 3.1.2 有色噪声环境下的性能比较

为了进一步验证算法的鲁棒性,将有色噪声作为系统额外的脉冲噪声进行验证。常见的几种有色噪声包括红噪声、粉红噪声、蓝噪声和紫噪声。图 6 示出了不同有色噪声干扰下 FMMCC-SAF 算法的学习曲线。可以看出,用 FMMCC-SAF 算法在一定程度上是可以抵制有色噪声的,具有一定的鲁棒性。以红噪声为例对各算法的性能进行了比较,结果如图 7 所示。可见,虽然 NSAF 算法具有一定的鲁棒性,但收敛速度和稳态误差性能均不很理想。基于 L1 范数优化导出鲁棒的 SSAF 和 AP-SSAF 算法对脉冲干扰均具有鲁棒性,但其稳态误差性能较差,

AP-SSAF 算法的计算复杂度随其仿射投影阶数的增加而增加。所提 FMMCC-SAF 算法与其他算法相比拥有更低的稳态误差。

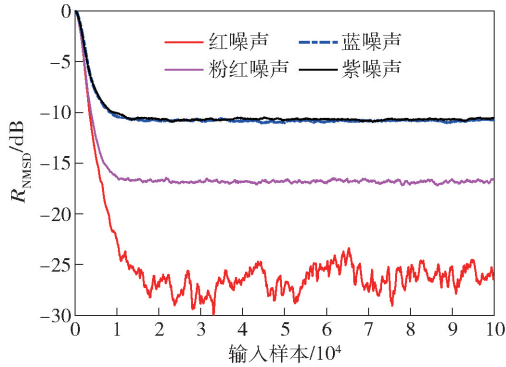


图 6 FMMCC-SAF 算法在不同有色噪声环境下的性能

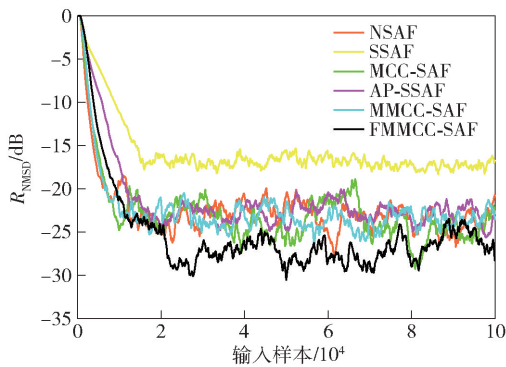


图 7 红噪声环境下不同算法的 NMSD

3.1.3 系统发生突变环境下的性能比较

为了比较各算法的跟踪能力,将待辨识的未知系统向量在迭代的中间过程变成  $-\omega_0$ 。图 8 所示为脉冲干扰环境下系统发生突变后的性能。可见,基于最大相关熵准则的 MCC-SAF 算法的收敛速度明显变慢,但用 FMMCC-SAF 算法在迭代到约  $5 \times 10^4$  时,系统发生突变,且在保持较低稳态误差的前提下提高了收敛速度。此外,相比于 MCC-SAF 算法,MMCC-SAF 算法拥有与其相近的收敛速度,但稳态误差更低。图 9 所示为红噪声环境下系统发生突变时的算法性能。显然,FMMCC-SAF 算法具有更低的稳态误差,而 MMCC-SAF 算法比 MCC-SAF 算法拥有较快的收敛速度。这是代价函数中使用了混合高斯函数的缘故,比用单一核函数的算法其收敛速度明显提高。

3.2 非线性信道均衡应用模型

非线性信道均衡应用模型由线性滤波器和无记忆非线性模型组成,信道输入为  $x(n) \in \{-1, 1\}$ ,

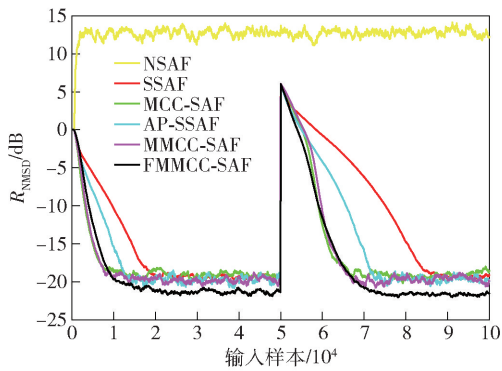


图 8 冲击噪声环境下各算法的学习曲线

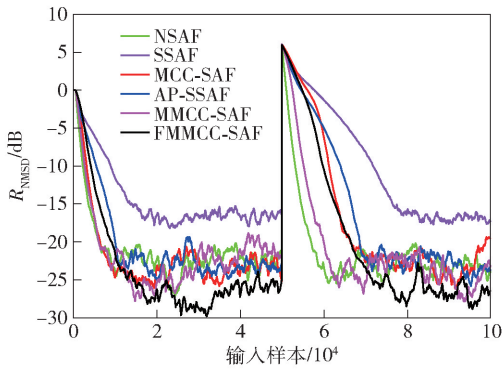


图 9 红噪声环境下各算法的性能

系统函数  $H(z) = 1/(1 + 0.5z)$ , 其中  $z$  表示  $z$  变换。非线性信道模型由  $u(n) = x(n) + 0.5(n - 1)$  和  $r(n) = au(n) + bu(n)^2 + v(n)$  组成,其中  $a$  为常数,  $v(n)$  为冲击噪声(发生概率为 0.01)。非线性信道均衡的目的是在失误差尽可能低的情况下重现原始输入数据,参数分别设置为  $a = -1, b = 0.9$ 。图 10 所示为在非线性信道模型下各种算法的 NMSD。MCC-SAF 算法中以牺牲稳态误差为代价,提升了收敛速度。在算法中取相同步长的情况下,MMCC-SAF 和 FMMCC-SAF 算法可在更低的稳态误差条件下重现原始的输入信号。

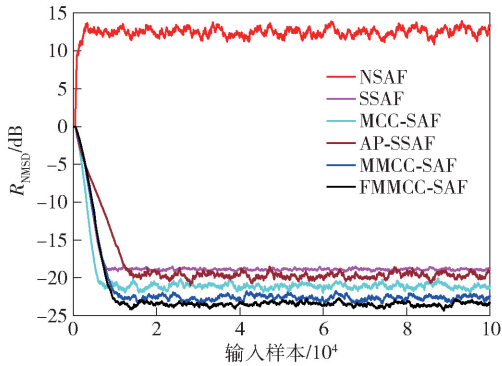


图 10 非线性信道均衡下各算法的 NMSD

## 4 结束语

将最大混合相关熵准则和分数阶微分引入 NSAF 算法,提出了 FMMCC-SAF 算法。利用 MMCC 误差的高阶统计量和凸特性,有效提高了算法在非高斯环境下的鲁棒性和系统追踪性能。此外,还利用分数阶微分来更新权重向量。仿真结果表明,在脉冲干扰情况下,FMMCC-SAF 算法在收敛速度和跟踪能力方面优于鲁棒的 SSAF 和 AP-SSAF 符号型算法。

### 参考文献:

- [1] 火元莲, 巩琪, 齐永锋, 等. 基于归一化最小均方算法的自适应核 RBFNN[J]. 北京邮电大学学报, 2022, 45(2): 29-35.  
HUO Y L, GONG Q, QI Y F, et al. Adaptive kernel RBFNN based on normalized least mean square algorithm[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2022, 45(2): 29-35.
- [2] SHEN Z J, HUANG T M, YANG L, et al. Improved NSAF algorithms with variable control parameter against impulsive noises[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2020, 39(4): 2207-2222.
- [3] LU J, ZHANG Q F, SHI W T, et al. Variable step-size normalized subband adaptive filtering algorithm for self-interference cancellation[J]. Measurement Science and Technology, 2021, 32(9): 95118-95128.
- [4] ZHAO H Q, LIU D X, HE X Q. Bias-compensated sign subband adaptive filter algorithm with individual weighting factors for input noise[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 2022, 69(3): 1872-1876.
- [5] SHI L, ZHAO H Q. An improved variable regularization parameter for sign subband adaptive filter[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2019, 38(3): 1396-1411.
- [6] LIU D X, ZHAO H Q, HE X Q, et al. Polynomial constraint generalized maximum correntropy normalized subband adaptive filter algorithm[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2022, 41(4): 2379-2396.
- [7] LUO Z Y, ZHOU J L, PU Y F. A widely linear complex-valued affine projection sign algorithm with its steady-state mean-square analysis[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2022, 41(6): 3446-3464.
- [8] WEN P W, ZHANG S, ZHANG J S. A novel subband adaptive filter algorithm against impulsive noise and its performance analysis[J]. Signal Processing, 2016, 127: 282-287.
- [9] YU Y, ZHAO H Q, CHEN B D, et al. Two improved normalized subband adaptive filter algorithms with good robustness against impulsive interferences[J]. Circuits, Systems, and Signal Processing, 2016, 35(12): 4607-4619.
- [10] 宋普查, 赵海全. 基于最大混合相关熵准则的主动噪声控制算法[J]. 信号处理, 2020, 36(6): 942-947.  
SONG P C, ZHAO H Q. Active noise control algorithm based on maximum mixture correntropy criterion[J]. Journal of Signal Processing, 2020, 36(6): 942-947.
- [11] YANG C, GAO Z, LI X A, et al. Adaptive fractional-order Kalman filters for continuous-time nonlinear fractional-order systems with unknown parameters and fractional-orders[J]. International Journal of Systems Science, 2021, 52(13): 2777-2797.
- [12] 王世元, 史春芬, 钱国兵等. 基于分数阶最大相关熵算法的混沌时间序列预测[J]. 物理学报, 2018, 67(1): 283-290.  
WANG S Y, SHI C F, QIAN G B, et al. Prediction of chaotic time series based on the fractional-order maximum correntropy criterion algorithm[J]. Acta Phys Sin, 2018, 67(1): 283-290.