

文章编号:1007-5321(2020)01-0035-05

DOI:10.13190/j.jbupt.2019-087

高斯白噪声信道下 SC-LDPC 码的结构设计

张亚坤¹, 张娅妹¹, 周 林^{1,2}, 贺玉成^{1,2}

(1. 华侨大学 厦门市移动多媒体通信重点实验室, 厦门 361021;

2. 西安电子科技大学 综合业务网理论及关键技术国家重点实验室, 西安 710071)

摘要: 为了优化空间耦合低密度奇偶校验(SC-LDPC)码在加性高斯白噪声信道下的性能,改变了其边缘扩展规则,将规则 SC-LDPC 码原模图上变量节点的边连接到与其相对应的前一个位置的校验节点上,提出了一种新型的空间耦合结构. 对其基矩阵、码率、度分布及译码复杂度进行分析,结果表明,与传统的 SC-LDPC 码相比,链长相同时,新结构的码率有所提高,校验节点的度分布变大. 最后通过 BP 译码验证了提出的空间耦合新结构译码性能的优越性.

关键词: 原模图; 空间耦合低密度奇偶校验码; 加性高斯白噪声信道

中图分类号: TN911.22

文献标志码: A

Structure Design of SC-LDPC Code over Additive White Gaussian Noise Channel

ZHANG Ya-kun¹, ZHANG Ya-mei¹, ZHOU Lin^{1,2}, HE Yu-cheng^{1,2}

(1. Xiamen Key Laboratory of Mobile Multimedia Communications, National Huaqiao University, Xiamen 361021, China;

2. State Key Laboratory of Integrated Services Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

Abstract: In order to optimize the performance of spatially coupled low density parity check (SC-LDPC) codes over the additive white gaussian noise channel, a novel spatial coupling structure was proposed by changing the edge spreading rules, the edges of the variable nodes were connected to the check nodes of the previous position. Basis matrix, rate, degree distribution and computational complexity were analyzed and the results show that the rate of the novel structure is promoted with the degree distribution of check nodes become larger. Finally, the performance of the proposed novel structure is verified by BP decoding.

Key words: protograph; spatially coupled low density parity check code; additive white gaussian noise channel

空间耦合低密度奇偶校验(SC-LDPC, spatially coupled low density parity check)码是一类可以逼近容量限的码字, Kudekar 等^[1-2]证明了其置信传播译

码门限能够达到对应规则 LDPC 码的最大后验概率译码门限. 然而, 此种渐进性能只存在于无限长的码字结构中, 当耦合链长有限时, 性能损失问题以及

收稿日期: 2019-05-24

基金项目: 国家自然科学基金项目(61901182, 61302095); 福建省自然科学基金项目(2018J01096); 泉州市科技计划项目(2018C108R); 华侨大学研究生科研创新能力培育计划项目(17013082035)

作者简介: 张亚坤(1992—), 女, 硕士生, E-mail: 1592473187@qq.com.

通信作者: 周 林(1982—), 男, 副教授, 硕士生导师, E-mail: linzhou@hqu.edu.cn.

末端额外的校验节点造成的码率损失问题就会凸显出来。

前人对 SC-LDPC 码进行结构设计,在减少其码率损失或提高其性能方面做了相关研究. Sanatkar 等^[3]提出了使用非规则的度分布在边界添加额外的变量节点提高 SC-LDPC 码的速率. Kwak 等^[4]通过在可靠位置添加变量节点构造的码字结构,减少码率损失的同时保证了有限长度时的译码性能. 随后, Kwak 等^[5]又提出了一种利用线性规划设计的度分布不均匀的非规则 SC-LDPC 码,其渐进性能以及有限长度下的性能均优于规则 SC-LDPC 码. Chen 等^[6]通过联合优化空间耦合长度与非耦合长度,最小化了由有限码字长度引起的 SC-LDPC 码的性能损失.

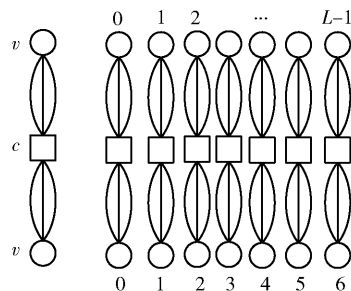
笔者在传统规则 SC-LDPC 码的基础上提出了一种新型的耦合结构,该结构定义了一种新的边缘扩展方式,允许原模图中变量节点的边连接到与其相对应的前一个位置的校验节点上,相应减少了校验节点的数量,从而降低了码率损失,同时增大了少数校验节点的度分度. 通过对译码复杂度的分析与数值仿真,在加性高斯白噪声 (AWGN, additive white gaussian noise) 信道模型下验证了所提出的新型 SC-LDPC 码耦合结构的译码性能优于传统规则的 SC-LDPC 码.

1 SC-LDPC 码

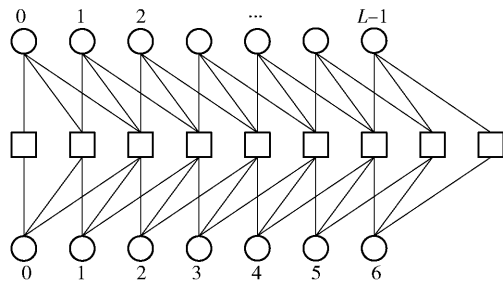
构造 SC-LDPC 码与构造原模图 LDPC 码^[7-8]类似,将结构优异的规则 LDPC 码原模图单元复制、置换,最终可得到一个空间耦合链结构,即将 L 个度分布为规则 (l, r) LDPC 码原模图单元耦合起来可得到一个 (l, r, L, w) SC-LDPC 码原模图. 其中,符号 L 表示 SC-LDPC 码空间耦合链的链长, l 和 r 分别表示变量节点与校验节点的最大度数, w 表示耦合宽度,与此原模图相对应的基矩阵用符号 \mathbf{B} 表示. 在 SC-LDPC 码的原模图中每个变量节点、每个校验节点和每条边分别对应着 Tanner 图中 M 个变量节点、 M 个校验节点和 M 条边,即在基矩阵中,每个 1 元素用 $M \times M$ 阶的二元置换矩阵替换,每个 0 元素用 $M \times M$ 阶的全零矩阵替换, M 称为扩展因子.

要构造具有特定度分布的 (l, r) SC-LDPC 码(只考虑 r 是 l 倍数的情况),首先需要找到性能良好规则的 (l, r) LDPC 原模图,确定 SC-LDPC 码的原模图单元,令 $\gcd(l, r)$ 代表 l 和 r 的最大公约数,则原模

图单元中变量节点的数目为 $r/\gcd(l, r)$, 校验节点的数目为 $l/\gcd(l, r)$ ^[9]. 确定原模图单元后,根据选择的链长 L 进行复制,将复制后每个位置上连接变量节点与校验节点的边展开,依次均匀独立地连接到不同位置的校验节点上,此过程中为了完成空间耦合需要添加额外的校验节点. 具体的边缘扩展方式如下:位置 u 处的变量节点依次与位置 $u, u+1, \dots, u+l-1$ 处的校验节点相连,由此可知耦合宽度 $w = l-1$,即为了完成空间耦合,末端需要增加 $l-1$ 个校验节点. 以规则 $(3, 6)$ SC-LDPC 码为例,采用边缘扩展的方法进行空间耦合的过程细节如图 1 所示,圆圈 v 表示变量节点,正方形 c 表示校验节点, L 表示链长,为了完成空间耦合,额外添加了 $w = 3-1 = 2$ 个校验节点.



(a) L 个未耦合的原模图单元



(b) 传统结构原模图单元的边缘展开规则

图 1 规则 $(3, 6)$ SC-LDPC 码构造过程

若 SC-LDPC 码的链长为 L 、耦合宽度为 w , 则 SC-LDPC 码的基矩阵为

$$\mathbf{B}_{[0, L-1]} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & & & & \\ & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_0 & & \\ & \vdots & \mathbf{B}_1 & \ddots & \\ & \mathbf{B}_w & \vdots & \ddots & \mathbf{B}_0 \\ & & \mathbf{B}_w & & \mathbf{B}_1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \mathbf{B}_w \end{bmatrix}_{(L+w)b_c \times Lb_v} \quad (1)$$

其中每个元素均对应一个大小为 $b_c \times b_v$ 的子块 \mathbf{B}_i , $i = 0 \sim w$, 故码率可表示为

$$R = 1 - \frac{(L+w)b_c}{Lb_v} \quad (2)$$

当图 1 中的耦合链长 $L=7$ 时,由图 1(b)可知,每个位置上的变量节点均匀独立地与 3 个校验节点相连,处于耦合链开始和结尾处的校验节点与 2 个或 4 个变量节点相连,中间位置的校验节点均匀独立地与 6 个变量节点相连,因此对应的基矩阵可表示为

$$B = \begin{bmatrix} 11000000000000 \\ 11110000000000 \\ 11111100000000 \\ 00111111000000 \\ 00001111110000 \\ 00000011111100 \\ 00000000111111 \\ 00000000001111 \\ 00000000000011 \end{bmatrix} \quad (3)$$

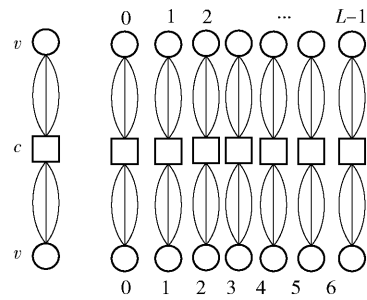
2 SC-LDPC 码的新结构

在构造 SC-LDPC 码的过程中,为了满足空间耦合条件,需要额外添加 $w=l-1$ 个校验节点,本节通过改变边的展开规则,只需要额外添加 $l-2$ 个校验节点便可以完成空间耦合. 在构造新结构的过程中耦合宽度 $w=l-1$ 不变,处于位置 0 处的变量节点的边依次均匀独立地与位置 $1, 2, \dots, l$ 处的校验节点相连,处于位置 $u (u \geq 1)$ 处的变量节点的边分别与位置 $u-1, u, \dots, u+l-2$ 处的校验节点相连,因此校验节点末尾只需要添加 $l-2$ 个校验节点. 在本节仍以规则 (3,6) SC-LDPC 为例,图 2 直观地展示了新结构进行空间耦合时边的连接过程.

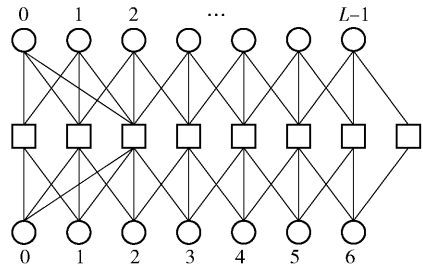
若 SC-LDPC 码的新结构链长为 L 、耦合宽度为 w ,则其基矩阵为

$$B_{[0, L-1]} = \begin{bmatrix} B_0 & B_0 & & & \\ B_1 & B_1 & B_0 & & \\ \vdots & \vdots & B_1 & B_0 & \\ B_w & B_w & \vdots & B_1 & \ddots \\ & B_w & \vdots & \ddots & B_0 \\ & & B_w & & B_1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & B_w \end{bmatrix}_{(L+w-1)b_c \times Lb_v} \quad (4)$$

其中每个元素 $B_i, i=0 \sim w$ 均对应一个大小为 $b_c \times$



(a) L 个未耦合的原模图单元



(b) 新结构原模图单元的边展开规则

图 2 SC-LDPC 码新结构的构造过程

b_v 的子矩阵. 新结构减少了校验节点的数量,如基矩阵的下标所示,校验节点数目的减少对应着行数的减少,故码率可表示为

$$R = 1 - \frac{(L+w-1)b_c}{Lb_v} \quad (5)$$

当图 2 中的耦合链长具体为 $L=7$ 时,每个变量节点均匀独立地与 3 个校验节点相连,位于耦合链开始处的校验节点与 4 个变量节点相连,结尾处的 2 个校验节点分别与 4 个和 2 个变量节点相连,位于耦合链第 3 个位置的校验节点与 8 个变量节点相连,其他位置的校验节点均匀独立地与 6 个变量节点相连. 现在变量节点的度最大为 3,校验节点的度最大为 8,对应的基矩阵为

$$B = \begin{bmatrix} 11110000000000 \\ 11111100000000 \\ 11111111000000 \\ 00001111110000 \\ 00000011111100 \\ 00000000111111 \\ 00000000001111 \\ 00000000000011 \end{bmatrix} \quad (6)$$

3 性能分析

3.1 码率分析比较

传统 SC-LDPC 码的码率在耦合链长趋于无限时可近似认为等于规则 LDPC 原模图单元的码率.

然而,当耦合链长为有限长度时,就会存在因在末端添加校验节点造成的码率损失问题. 第 2 节介绍的 SC-LDPC 码新结构在耦合的过程中改变了边缘扩展规则,相应地减少了在末端添加校验节点的数量,即传统的 SC-LDPC 码需要添加 $l-1$ 个校验节点,新结构只需添加 $l-2$ 个校验节点. 由式(2)和式(5)给出的码率表达式可以看出,码率与耦合链长 L 、耦合宽度 w 以及子矩阵的大小有关,在耦合链长较短时,所提出的空间耦合新结构能够有效地减少码率的损失.

3.2 复杂度分析

SC-LDPC 码译码时,计算复杂度不仅与选取的链长 L 、扩展因子 M 有关,还与变量节点和校验节点的度分布有关. 在每个位置上都有 $2M$ 个变量节点, M 个校验节点,先依次更新每个位置上度分布为 l 的变量节点,再依次更新每个位置上度分布为 r 的校验节点,此时,SC-LDPC 码译码迭代一次的计算复杂度可以表示为

$$C_T = (2ML)(MrL) = 2rL^2M^2 \quad (7)$$

所提出的新结构与传统结构相比列重相同,行重略有变化. 以耦合链长 $L=7$ 的(3,6)规则 LDPC 码原模图单元构造 SC-LDPC 码为例,由式(3)与式(6)可以看出(3,6)规则 SC-LDPC 码和其新结构的列重均为 3,最大行重分别为 6 和 8. 行重值变大,意味着参与校验方程的变量节点增多,更多的变量节点受到保护,可以改善译码性能. 然而,由于新结构中少量校验节点的度增加,所以计算复杂度略微增加.

4 仿真结果

下面分别选取不同参数下同码长同码率的规则(3,6) SC-LDPC 码与 SC-LDPC 码的新结构进行性能仿真,结果如图 3 和图 4 所示,虚线表示规则(3,6) SC-LDPC 码,实线表示新结构. 在图 3 中,规则(3,6) SC-LDPC 码的链长 L 分别为 30、40、50,对应的二元置换矩阵的阶数 M 分别为 50、300、1000;新结构的链长 L 分别为 15、20、25,阶数 M 分别为 100、600、2000. 此时,得到了码率 R 为 0.467、码长 n 为 3000 的短码,码率 R 为 0.475、码长 n 为 24000 的中长码以及码率 R 为 0.48、码长 n 为 100000 的长码. 在图 4 中,规则(3,6) SC-LDPC 码的链长 L 全部为 30,对应的阶数 M 分别为 50、200、1500;空间耦合新结构的链长 L 全部为 15,阶数 M 分别为

100、400、3000. 此时,得到的 3 组码字,码率 R 均为 0.467,码长 n 分别为 3000、12000、90000.

由图 3 可以看出,在 3 组同码长同码率的码字中,所提出的 SC-LDPC 新结构的译码性能均优于同组的规则(3,6) SC-LDPC 码. 新结构与规则(3,6) SC-LDPC 码相比,码长 n 为 3000 时,原结构在信噪比为 2.6 dB、误码率为 10^{-4} 时开始出现错误平台,新结构则在信噪比为 2.3 dB 时误码率达到 10^{-6} ,大约有 2 dB 的增益;码长 n 为 24000 且误码率为 10^{-6} 时,新结构比原结构大约有 0.05 dB 的增益;码长 n 为 100000 且误码率为 10^{-6} 时,新结构比规则(3,6) SC-LDPC 码大约有 0.03 dB 的增益. 图 4 中的 3 组码字码率全部相同,新结构与规则(3,6) SC-LDPC 码相比,在码长 n 为 12000 且误码率为 10^{-6} 时大约有 0.3 dB 的增益,码长 n 为 90000 且误码率为 10^{-6} 时仍有微小的增益.

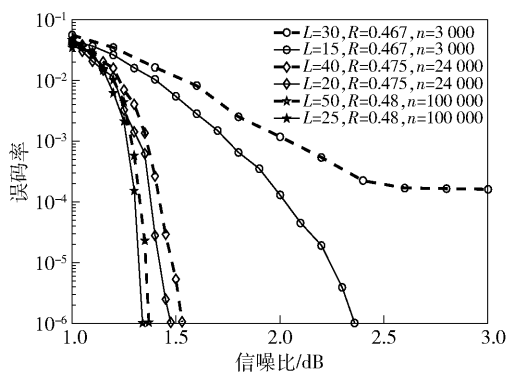


图 3 3 组不同码率的 SC-LDPC 码性能比较

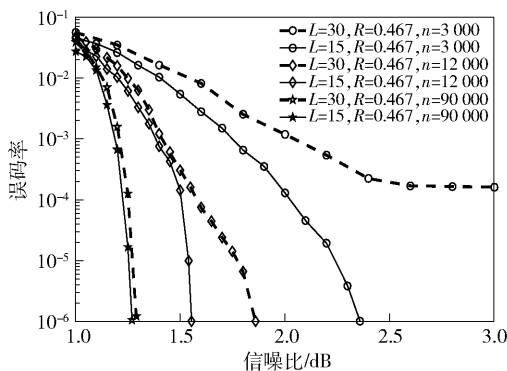


图 4 3 组相同码率的 SC-LDPC 码性能比较

从上面的分析中得知,所提出的 SC-LDPC 码的新结构对短码、中码、长码均适用,是一类译码性能优异的码字,尤其对短码的译码性能改善最佳,因此新结构更适用于 AWGN 信道中短码的传输.

5 结束语

笔者通过对传统 SC-LDPC 码进行边的重排,构造出一种新的空间耦合结构. 该结构从本质上减少了需要额外添加的校验节点的数量,使码字更进一步地趋向于未耦合时的码率,降低了码率的损失. 与传统的 SC-LDPC 码相比,该结构增加了变量节点之间的约束关系. 最后仿真结果证明,所提出的新结构,在 AWGN 信道下,可以改善传统 SC-LDPC 码的译码性能并且对改善短码的错误平层效应尤为突出.

参考文献:

- [1] Kudekar S, Richardson T J, Urbanke R L. Threshold saturation via spatial coupling: why convolutional LDPC ensembles perform so well over the BEC [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(2): 803-834.
- [2] Kudekar S, Richardson T J, Urbanke R L. Spatially coupled ensembles universally achieve capacity under belief propagation[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2013, 59(12): 7761-7813.
- [3] Sanatkar M R, Pfister H D. Increasing the rate of spatially-coupled codes via optimized irregular termination[C]// 2016 9th International Symposium on Turbo Codes and Iterative Information Processing (ISTC). Brest: IEEE Press, 2016: 31-35.
- [4] Kwak H, Kim J, Jong-Seon. Rate-loss reduction of SC-LDPC codes by optimizing reliable variable nodes via expected graph evolution [C] // 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Aachen: IEEE Press, 2017: 2930-2934.
- [5] Kwak H, No J, Park H. Design of irregular SC-LDPC codes with non-uniform degree distributions by linear programming[J]. IEEE Transactions on Communications, 2019, 67(4): 2632-2646.
- [6] Chen Shuang, Peng Kewu, Zhang Yushu, et al. Optimization of finite-length SC-LDPC for uplink NOMA [C] // 2018 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops). Kansas City, MO: IEEE Press, 2018: 1-6.
- [7] Thorpe J. Low-density parity-check (LDPC) codes constructed from protographs [J]. Interplanetary Network Progress Report, 2003, 42(154): 1-7.
- [8] Divsalar D, Dolinar S, Jones C. Constructions of protograph LDPC codes with linear minimum distance [C] // 2006 IEEE International Symposium on Information Theory. Seattle, WA: IEEE Press, 2006: 664-668.
- [9] Mitchell D G M, Lentmaier M, Costello D J. Spatially coupled LDPC codes constructed from protographs [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2015, 61(9): 4866-4889.