

文章编号:1007-5321(2019)01-0102-07

DOI:10.13190/j.jbupt.2018-142

# 三支机器人最小范数逆解算法

洪磊<sup>1</sup>, 王保升<sup>2</sup>, 陈钢<sup>3</sup>

(1. 南京工程学院 汽车与轨道交通学院, 南京 211167; 2. 南京工程学院 智能装备产业技术研究院, 南京 211167;  
3. 北京邮电大学 自动化学院, 北京 100876)

**摘要:** 基于线性方程组及条件极值理论, 针对三支机器人逆运动学问题, 提出了一种改进的最小范数逆解算法, 避免了传统最小范数逆解中雅可比矩阵广义逆的复杂计算. 针对操作分支关节数不小于任务空间维数的情况, 进一步利用施密特正交化过程进行简化, 提高了运算的实时性. 搬运物体的仿真实例结果验证了所提算法的有效性.

**关键词:** 三支; 最小范数; 运动学逆解; 施密特正交化过程

**中图分类号:** TP242

**文献标志码:** A

## Algorithm for Least-Norm Inverse Kinematic Solution of Trinal-Branch Robotic Manipulator

HONG Lei<sup>1</sup>, WANG Bao-sheng<sup>2</sup>, CHEN Gang<sup>3</sup>

(1. School of Automotive and Rail Transit, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;  
2. Industrial Technology Research Institute of Intelligent Equipment, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China;  
3. School of Automation, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China)

**Abstract:** The inverse kinematics for trinal-branch robotic manipulator is researched based on the theory of linear equations set and conditional extremum, and an improved algorithm for least-norm inverse kinematics solution is proposed. The complicated calculation in conventional algorithm for the generalized inverse of Jacobian is avoided in this algorithm, especially, if the joint degree of each handling branch is equal to or more than the dimension of task space, a further simplified calculation can be obtained with the introduction of the Schmidt orthogonalization procedure. The proposed algorithm is of the higher real-time computation capacity than the common method, through the simulation of carrying a single object, the validity of the proposed algorithm is certificated.

**Key words:** trinal-branch; least-norm; inverse kinematics; Schmidt orthogonalization procedure

为了增加机器人的工作空间和灵活性, 空间机器人已向着多臂、多分支的方向发展. 其中, 三支机器人由于其结构紧凑、操控灵活且具备协调操作能力, 因此成为多分支机器人研究的热点<sup>[1]</sup>. 逆运动学求解是三支机器人协调操作研究的基础. 近年来, 学者们在三支机器人建模、逆运动学分析、步态规划等方面做了相关研究<sup>[2-5]</sup>. 可以发现, 由

于三支机器人任务空间维数和关节数目的增加, 造成其雅可比矩阵广义逆运算量的极大增加和算法实时性的下降.

笔者在前人研究基础上, 提出了一种三支机器人最小范数逆解算法. 该算法运用线性方程组理论, 构造了特解加齐次解形式的逆解结构和统一解算模型, 且无需直接求解雅可比矩阵广义逆, 从而有

收稿日期: 2018-07-01

基金项目: 国家自然科学基金项目(61703200); 江苏省“青蓝工程”基金项目

作者简介: 洪磊(1982—), 男, 副教授, E-mail: njithl@163.com.

效地提高了三分支机器人逆解的实时性. 结合搬运物体操作的仿真实例,验证了算法的有效性.

## 1 最小范数逆解的结构

三分支机器人的最小范数逆解是由单臂冗余度机器人推广而来,这里首先以  $n$  自由度单臂冗余度机器人说明最小范数逆解的结构. 设任务空间维数为  $m$  ( $m \leq 6$ ), 满足  $m < n$ , 可得机器人关节速度为

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}}_e + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\boldsymbol{\phi}} \quad (1)$$

其中:  $\dot{\mathbf{x}}_e \in \mathbf{R}^m$  为机器人在笛卡儿空间的末端速度, 包括移动速度和转动速度;  $\dot{\mathbf{q}} \in \mathbf{R}^n$  为关节速度;  $\mathbf{J} \in \mathbf{R}^{m \times n}$  为机器人的雅可比矩阵;  $\mathbf{J}^+ \in \mathbf{R}^{n \times m}$  为  $\mathbf{J}$  的广义逆;  $\mathbf{I} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为单位矩阵;  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$  为零空间  $N(\mathbf{J})$  投影矩阵;  $\dot{\boldsymbol{\phi}} \in \mathbf{R}^n$  为任意矢量. 式(1)等号右边的第1项  $\mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}}_e$  即为最小范数解, 第2项  $(\mathbf{I} - \mathbf{J}^+ \mathbf{J}) \dot{\boldsymbol{\phi}}$  是正交于  $\mathbf{J}^+ \dot{\mathbf{x}}_e$  的齐次解, 齐次解不影响末端运动, 故本文算法不做讨论, 重点研究第一项的求解问题.

下面利用雅可比矩阵的性质构造最小范数解的结构形式. 当  $\mathbf{J}$  满秩且非奇异时, 可从  $\mathbf{J}$  中提取  $m$  个线性无关的列向量构成  $m \times m$  阶矩阵  $\mathbf{J}_1$ , 剩余的  $r$  ( $r = n - m$ ) 个列向量构成  $m \times r$  阶矩阵  $\mathbf{J}_0$ , 则有

$$\mathbf{J} = [\mathbf{J}_0^{m \times r} \quad \mathbf{J}_1^{m \times m}] \quad (2)$$

$\dot{\mathbf{q}}$  可以表示为特解加齐次解之和的形式, 即

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_p + \dot{\mathbf{q}}_h \quad (3)$$

其中  $\dot{\mathbf{q}}_p \in \mathbf{R}^n$  和  $\dot{\mathbf{q}}_h \in \mathbf{R}^n$  分别为特解和齐次解.  $\dot{\mathbf{q}}_h$  可表示为  $r$  ( $r = n - m$ ) 个线性无关的基础解向量 ( $\dot{q}_{h1}, \dot{q}_{h2}, \dots, \dot{q}_{hr}$ ) 的组合,  $\dot{\mathbf{q}}_h$  表示为如下矩阵形式:

$$\dot{\mathbf{q}}_h = [\dot{q}_{h1} \quad \dot{q}_{h2} \quad \dots \quad \dot{q}_{hr}] \boldsymbol{\kappa}^{r \times 1} \quad (4)$$

其中:  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbf{R}^{r \times 1}$  为由任意实数组成的系数矢量, 即

$$\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1 \quad \kappa_2 \quad \dots \quad \kappa_r)^T \quad (5)$$

特解  $\dot{\mathbf{q}}_p$  和齐次解  $\dot{\mathbf{q}}_h$  可由式(6)构造, 即

$$\dot{\mathbf{q}}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^{r \times 1} \\ (\mathbf{J}_1^{m \times m})^{-1} \dot{\mathbf{x}}_e^{m \times 1} \end{bmatrix}, \dot{\mathbf{q}}_h = \begin{bmatrix} \mathbf{I}^{r \times r} \\ -(\mathbf{J}_1^{m \times m})^{-1} \mathbf{J}_0^{m \times r} \end{bmatrix} \boldsymbol{\kappa}^{r \times 1} \quad (6)$$

将式(6)的结果代入式(3)得

$$\dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\kappa} \\ \mathbf{J}_1^{-1} (\dot{\mathbf{x}}_e - \mathbf{J}_0 \boldsymbol{\kappa}) \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(7)为利用雅可比矩阵性质构造的逆解  $\dot{\mathbf{q}}$  的一般通解形式. 由式(3)~式(5), 逆解  $\dot{\mathbf{q}}$  可表示为

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_p + \kappa_1 \dot{q}_{h1} + \kappa_2 \dot{q}_{h2} + \dots + \kappa_r \dot{q}_{hr} \quad (8)$$

则根据式(8)可得  $\dot{\mathbf{q}}$  的2-范数平方如下:

$$\|\dot{\mathbf{q}}\|^2 = \left\| \dot{\mathbf{q}}_p + \sum_{i=1}^r \kappa_i \dot{q}_{hi} \right\|^2 = \left( \dot{\mathbf{q}}_p + \sum_{i=1}^r \kappa_i \dot{q}_{hi} \right)^T \left( \dot{\mathbf{q}}_p + \sum_{i=1}^r \kappa_i \dot{q}_{hi} \right) \quad (9)$$

要得到最小范数逆解  $\dot{\mathbf{q}}_{\min}$ , 可通过式(9)对每个  $\kappa_i$  ( $i = 1 \sim r$ ) 求偏导, 并令偏导数等于0得

$$\frac{\partial \|\dot{\mathbf{q}}\|^2}{\partial \kappa_i} = 2 \left( \dot{\mathbf{q}}_p + \sum_{j=1}^r \kappa_j \dot{q}_{hj} \right)^T \dot{q}_{hi} = 0 \quad (10)$$

式(10)关于  $\kappa_i$  ( $i = 1 \sim r$ ) 的  $r \times r$  阶线性方程组,  $\kappa_i$  ( $i = 1 \sim r$ ) 可由式(10)求出, 将结果代入式(7)即可求得最小范数逆解.

## 2 三分支机器人最小范数逆解

### 2.1 三分支机器人模型

一般性三分支机器人模型如图1所示.

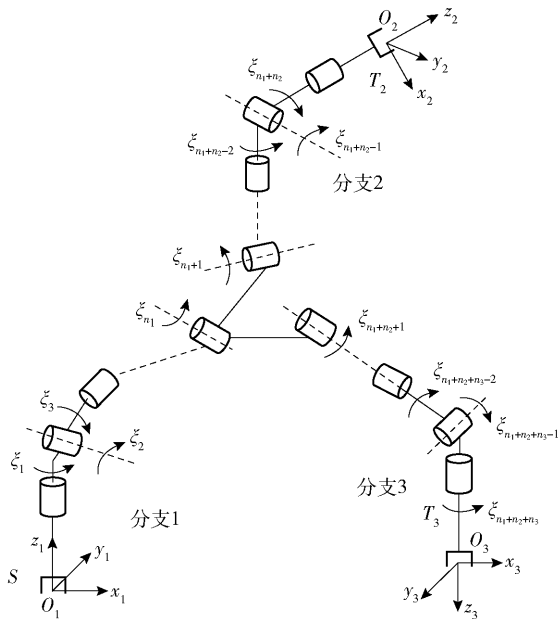


图1 三分支机器人模型

设机器人的三分支分别是分支1、分支2和分支3, 坐标系  $S$  为基坐标系, 坐标系  $T_2$  和  $T_3$  分别为与机器人分支2和3末端固连的工具坐标系. 支上的关节数目分别为  $n_1$ 、 $n_2$  和  $n_3$ , 总关节数目为  $n = n_1 + n_2 + n_3$ . 作业时, 为满足灵活性要求, 在设计上一般具有冗余关节, 要求自由度  $n$  大于任务空间的最大维数12, 即总关节数目满足  $n > 12$ .

### 2.2 三分支机器人最小范数逆解模型

采用如图1所示的三分支机器人模型, 分支1

和2、3分别组成两个单链的串联机械臂,记为 $M_2$ 与 $M_3$ .为简化分析过程,做以下符合实际情况的假设.设分支2和3关节数目相同,即 $n_2 = n_3$ ,则 $M_2$ 与 $M_3$ 两个单链臂的自由度数相同,记为 $n' = n_1 + n_2$ ,设各自的末端任务空间维数都为 $m$ ,且分别对应的雅可比矩阵 $J_{M_2}$ 和 $J_{M_3}$ 为满秩非奇异矩阵,即满足 $\text{Rank}(J_{M_2}) = \text{Rank}(J_{M_3}) = m$ .

在以上条件假设下,单链臂 $M_2$ 和 $M_3$ 各自对应的逆解 $\dot{q}_{M_2}$ 和 $\dot{q}_{M_3}$ 可分别表示为

$$\dot{q}_{M_2} = [\kappa_2 \quad \eta_2]^T, \dot{q}_{M_3} = [\kappa_3 \quad \eta_3]^T \quad (11)$$

其中: $\dot{q}_{M_2}, \dot{q}_{M_3} \in R^{n'}$ ;  $\eta_2 = J_{M_2,1}^{-1}(\dot{x}_{2,e} - J_{M_2,0}\kappa_2)$ ,  $\eta_3 = J_{M_3,1}^{-1}(\dot{x}_{3,e} - J_{M_3,0}\kappa_3)$ ,  $\dot{x}_{2,e}$ 和 $\dot{x}_{3,e}$ 分别为分支2和3末端速度, $J_{M_2,0}$ 和 $J_{M_2,1}$ 为由 $J_{M_2}$ 根据式(2)构造的2个矩阵,同理 $J_{M_3,0}$ 和 $J_{M_3,1}$ 可以通过 $J_{M_3}$ 构造而来, $\kappa_2 = (\kappa_{2,1} \quad \kappa_{2,2} \quad \cdots \quad \kappa_{2,r})^T$ 和 $\kappa_3 = (\kappa_{3,1} \quad \kappa_{3,2} \quad \cdots \quad \kappa_{3,r})^T$ 分别为 $\dot{q}_{M_2}$ 和 $\dot{q}_{M_3}$ 齐次解的系数矢量,且维数相同,其中维数 $r = n' - m$ ,同时, $\eta_2 = (\eta_{2,1}, \eta_{2,2}, \cdots, \eta_{2,m})^T \in R^m$ ,  $\eta_3 = (\eta_{3,1}, \eta_{3,2}, \cdots, \eta_{3,m})^T \in R^m$ ,其每个元素分别各自是 $\kappa_2$ 和 $\kappa_3$ 的线性组合.

由于三支机器人存在耦合分支(分支1),故需满足 $\dot{q}_{M_2}$ 和 $\dot{q}_{M_3}$ 中前 $n_1$ 个元素相等的约束条件.根据分支1关节数 $n_1$ 与基础解系数矢量维数 $r$ 之间的大小关系,逆解问题可分为下列3种情况求解.

1) 当 $n_1 < r$ 的情况

可令 $\kappa_2$ 和 $\kappa_3$ 的前 $n_1$ 个元素对应相等,则有

$$\dot{q} = [\kappa_2 \quad \eta_2 \quad \eta_3]^T \quad (12)$$

其中: $\eta_3' = (\kappa_{3,n_1+1}, \cdots, \kappa_{3,r}, \eta_{3,1}, \cdots, \eta_{3,m})^T \in R^{n'-n_1}$ .显然组合后的基础解系数矢量 $\kappa'$ 为

$$\kappa' = (\kappa_{2,1}, \cdots, \kappa_{2,r}, \kappa_{3,n_1+1}, \cdots, \kappa_{3,r})^T \quad (13)$$

此时 $\dot{q}$ 是 $\kappa'$ 的函数,对 $\dot{q}$ 取2-范数并对 $\kappa'$ 的每个元素 $\kappa'_i (i = 1 \sim 2r - n_1)$ 求偏导,令偏导数等于0得

$$\frac{\partial \|\dot{q}\|^2}{\partial \kappa'_i} = \frac{\partial ([\kappa_2 \quad \eta_2 \quad \eta_3']^T [\kappa_2 \quad \eta_2 \quad \eta_3'])}{\partial \kappa'_i} = 0 \quad (14)$$

显然由式(14)可以得到关于 $\kappa'_i$ 的 $2r - n_1$ 个线性方程构成的方程组,可表示为如下矩阵形式:

$$J_k \kappa' = \tau \quad (15)$$

其中: $J_k \in R^{(2r-n_1) \times (2r-n_1)}$ ,  $\tau \in R^{(2r-n_1)}$ 为 $\kappa'$ 的方程组系数矩阵和常数向量.因 $J_k$ 为方阵,在非奇异情况下得

$$\kappa' = J_k^{-1} \tau \quad (16)$$

将 $\kappa'$ 的结果代入式(12)可得到最小范数逆解.

2) 当 $n_1 = r$ 的情况

可令 $\kappa_2$ 和 $\kappa_3$ 的全部元素对应相等,则有

$$\dot{q} = [\kappa_2 \quad \eta_2 \quad \eta_3]^T \quad (17)$$

显然此时组合后的基础解系数矢量 $\kappa'$ 为

$$\kappa' = \kappa_2 = (\kappa_{2,1}, \cdots, \kappa_{2,r})^T \quad (18)$$

以下解算过程同情况(1),不再赘述.情况(2)可认为是情况(1)在 $\eta_3' = \eta_3$ 时的特例.

3) 当 $n_1 > r$ 的情况

令 $\kappa_2$ 和 $\kappa_3$ 的全部元素对应相等,同时令 $\eta_2$ 和 $\eta_3$ 的前 $n_1 - r$ 项元素对应相等,则有

$$\dot{q} = [\kappa_2 \quad \eta_2 \quad \eta_3']^T \quad (19)$$

其中: $\eta_3' = (\eta_{3,n_1-r+1}, \cdots, \eta_{3,m})^T \in R^{n'-n_1}$ ,由于 $\kappa_2 = \kappa_3$ ,而 $\eta_2$ 和 $\eta_3$ 的元素分别是 $\kappa_2$ 和 $\kappa_3$ 的线性组合,故组合后的基础解系数矢量 $\kappa'$ 仍可表示为式(18)的形式.

对 $\dot{q}$ 取2-范数并对 $\kappa'$ 的每个元素 $\kappa'_i (i = 1 \sim r)$ 求偏导,令偏导数等于0,可得关于 $\kappa'_i$ 的 $r$ 个线性方程构成的方程组.由于缺少了耦合分支中后 $n_1 - r$ 个元素相等的约束条件,所以必须进行调节补充,综合后,等价于下列条件极值问题:

$$\begin{cases} \min \|\dot{q}(\kappa')\|^2, & \kappa' = (\kappa_{2,1}, \cdots, \kappa_{2,r})^T \\ \text{s.t. } \eta_{2,i}(\kappa') = \eta_{3,i}(\kappa'), & i = 1 \sim n_1 - r \end{cases} \quad (20)$$

利用拉格朗日乘子法求解,引入 $n_1 - r$ 个常数 $\lambda_i$ ,记 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_1, \cdots, \lambda_{n_1-r})^T$ ,则式(20)等价于无条件极值问题:  $\min \|\dot{q}(\kappa')\|^2 + \sum_{i=1}^{n_1-r} \lambda_i (\eta_{2,i}(\kappa') - \eta_{3,i}(\kappa'))$ . 令函数

$$f(\kappa', \lambda) = \|\dot{q}(\kappa')\|^2 + \sum_{i=1}^{n_1-r} \lambda_i (\eta_{2,i}(\kappa') - \eta_{3,i}(\kappa')) \quad (21)$$

$f(\kappa', \lambda)$ 对 $\kappa'$ 和 $\lambda$ 中每个元素求偏导并等于0得

$$\begin{cases} \frac{\partial f(\kappa', \lambda)}{\partial \kappa'_i} = 0, & i = 1 \sim r \\ \frac{\partial f(\kappa', \lambda)}{\partial \lambda_j} = 0, & j = 1 \sim n_1 - r \end{cases} \quad (22)$$

由式(22)可求出 $\kappa'_i (i = 1 \sim r)$ ,再代入式(19)得出 $\dot{q}$ 为最小范数逆解,至此得出了三支机器人最小范数逆解算法的求解模型.分析可知,情况1)需求解 $2r - n_1$ 阶方阵的逆,情况2)和情况3)都需求解 $n_1$ 阶方阵的逆,运算量都明显小于雅可比

矩阵  $2m \times (n_1 + 2n_2)$  阶广义逆求解,故实时性得到提高。

### 2.3 简化的最小范数逆解算法

在 2.2 节所述的 3 种情况中,前两种情况下由于  $r = n_1 + n_2 - m$  (或  $r = n_1 + n_3 - m$ ),故  $n_2 \geq m$  且  $n_3 \geq m$  (仍假设  $n_2 = n_3$ ),即两个操作分支的关节数不小于任务空间维数,在这种条件下,计算模型可做进一步简化,得到更简洁的形式。

根据式(11)、式(16)和式(22),可以构造三支机器人整体的特解  $\dot{q}_p$  和齐次解  $\dot{q}_h$  的形式如下。

1) 当  $n_1 < r$  时

$$\begin{aligned} \dot{q}_p &= [\mathbf{0}^{r \times 1} \quad (J_{M2,1})^{-1} \dot{x}_{2,e} \quad \mathbf{0}^{(n_3-r) \times 1} \quad (J_{M3,1})^{-1} \dot{x}_{3,e}]^T \\ \dot{q}_h &= \\ &[I^{r \times r} - (J_{M2,1})^{-1} J_{M2,0} \quad I^{(n_3-r) \times (n_3-r)} \quad (J_{M3,1})^{-1} J_{M3,0}]^T \kappa' \end{aligned} \quad (23)$$

2) 当  $n_1 = r$  时

$$\begin{aligned} \dot{q}_p &= [\mathbf{0}^{r \times 1} \quad (J_{M2,1})^{-1} \dot{x}_{2,e} \quad (J_{M3,1})^{-1} \dot{x}_{3,e}]^T \\ \dot{q}_h &= [I^{r \times r} \quad - (J_{M2,1})^{-1} J_{M2,0} \quad (J_{M3,1})^{-1} J_{M3,0}]^T \kappa' \end{aligned} \quad (24)$$

式(23)和式(24)中,  $\kappa'$  可统一记为

$$\kappa' = (\kappa'_1 \quad \kappa'_2 \quad \cdots \quad \kappa'_\alpha)^T \quad (25)$$

则逆解  $\dot{q}$  可表示为

$$\dot{q} = \dot{q}_p + \kappa'_1 \dot{q}_{h1} + \kappa'_2 \dot{q}_{h2} + \cdots + \kappa'_\alpha \dot{q}_{h\alpha} \quad (26)$$

其中:  $(\dot{q}_{h1}, \dot{q}_{h2}, \cdots, \dot{q}_{h\alpha})$  为由式(23)或式(24)确定的齐次解基础解系,可以通过施密特正交化过程化为与其等价的规范正交基,从而简化求解过程。

设  $(\dot{q}_{h1}, \dot{q}_{h2}, \cdots, \dot{q}_{h\alpha})$  经过施密特正交化后,得到其规范正交基  $(\dot{q}'_{h1}, \dot{q}'_{h2}, \cdots, \dot{q}'_{h\alpha})$ , 则式(26)等价于

$$\dot{q} = \dot{q}_p + \kappa''_1 \dot{q}'_{h1} + \kappa''_2 \dot{q}'_{h2} + \cdots + \kappa''_\alpha \dot{q}'_{h\alpha} \quad (27)$$

其中:  $\kappa'' = (\kappa''_1 \quad \kappa''_2 \quad \cdots \quad \kappa''_\alpha)^T$  为正交化后新的系数向量。对每个  $\kappa''_i (i = 1 \sim \alpha)$  求偏导并令其等于 0 得

$$\frac{\partial \|\dot{q}\|^2}{\partial \kappa''_i} = 2 \left( \dot{q}_p + \sum_{j=1}^{\alpha} \kappa''_j \dot{q}'_{hj} \right)^T \dot{q}'_{hi} = 0 \quad (28)$$

则通过式(28)可求出  $\kappa''_i$ , 得

$$\kappa''_i = - \frac{\dot{q}_p^T \dot{q}'_{hi}}{\dot{q}'_{hi}^T \dot{q}'_{hi}} \quad (29)$$

将式(29)代入式(26)得

$$\dot{q}_{\min} = \dot{q}_p - \sum_{i=1}^{\alpha} \left( \frac{\dot{q}_p^T \dot{q}'_{hi}}{\dot{q}'_{hi}^T \dot{q}'_{hi}} \right) \dot{q}'_{hi} \quad (30)$$

式(30)即为简化的最小范数逆解形式。

## 3 算例仿真与分析

以如图 2(a) 所示的三支机器人为例,对本文提出的最小范数逆解算法进行搬物体操作的实例仿真。其中,分支 1 为支撑分支,具有 3 个旋转关节,其基部有一个移动导轨。2 个操作分支 2 和 3 各有 5 个旋转关节。整个机器人系统共有 14 个自由度。

采用旋量法进行建模,以如图 2(a) 所示位形为参考位形建立如图 2(b) 所示的旋量坐标系。

在参考位形下,各关节旋量坐标(单位:m)为

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \{1, 0, 0, 0, 0, 0\} & \xi_2 &= \{0, 0, 0, 0, 0, 1\} \\ \xi_3 &= \{0, -0.33, 0, -1, 0, 0\} \\ \xi_4 &= \{0, 0.41, 0, 0, 0, 1\} \\ \xi_5 &= \{1, 0, 0.17, 0, -1, 0\} \\ \xi_6 &= \{-1.29, 0, -0.17, 0, 1, 0\} \\ \xi_7 &= \{0, 0.17, 0, 0, 0, 1\} \\ \xi_8 &= \{0, 1.75, 0, 1, 0, 0\} \\ \xi_9 &= \{0, 0.17, 0, 0, 0, 1\} \\ \xi_{10} &= \{1, 0, 0.65, 0, -1, 0\} \\ \xi_{11} &= \{-1.29, 0, -0.65, 0, 1, 0\} \\ \xi_{12} &= \{0, 0.65, 0, 0, 0, 1\} \\ \xi_{13} &= \{0, 1.75, 0, 1, 0, 0\} \\ \xi_{14} &= \{0, 0.65, 0, 0, 0, 1\} \end{aligned}$$

设  $M_2$  和  $M_3$  末端刚性夹持物体,三支机器人的初始关节值为  $q_0 = (0, 0, 0, 0, -60, -90, 90, -60, 0, 60, 90, 90, 60, 0)$ , 其中移动关节单位为 m, 转动关节单位为度。根据以上设置,三支机器人的初始位形如图 3(a) 所示。下文中涉及物体位置坐标及位置误差的单位均为 m。物体中心位于  $M_2$  和  $M_3$  末端的连线中点处,其初始位置坐标为  $(-0.41, 0, 1.5434)$ , 物体姿态搬运物体时不变,设为与  $M_2$  末端相同。物体中心移动到  $(-0.3, -0.7, 1.1)$ , 则  $M_2$  和  $M_3$  的终点期望位置坐标分别为

$$g_{s,2}^d = (-0.2389, -0.7, 1.1)$$

$$g_{s,3}^d = (-0.3611, -0.7, 1.1)$$

采用带抛物线过渡域的线性插值法规划物体的运动。设过渡域加速度  $a_{ce} = 0.04 \text{ m/s}^2$ , 运动时间  $T = 10 \text{ s}$ , 设单位插补时间  $t_0 = 0.05 \text{ s}$ , 插补次数  $k = 200$ 。分别采用广义逆算法和本文算法进行求解,可得终点处的逆解结果如表 1 所示。

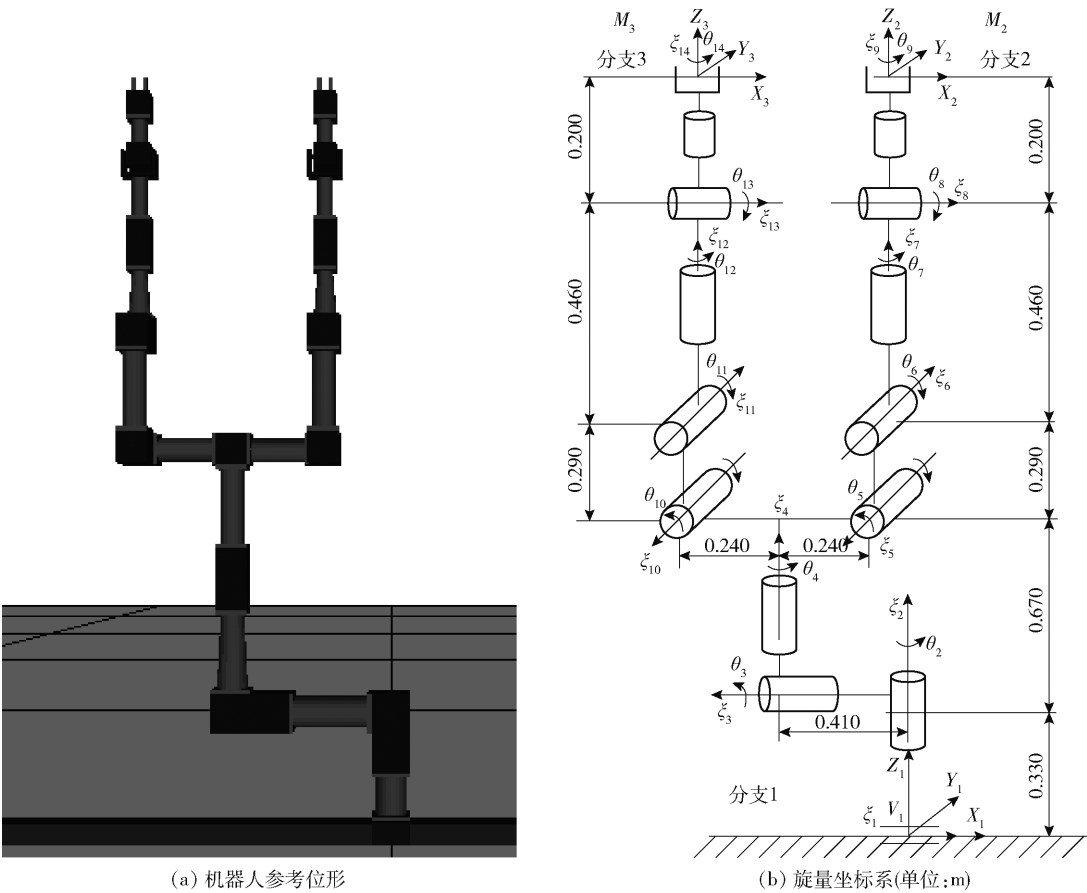


图 2 三分支机器人参考位形及旋量法建模

| 表 1 广义逆算法和本文算法计算结果比较 |            |            |               |               |               |               |               | (°) |
|----------------------|------------|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|
| 算法                   | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$    | $\theta_4$    | $\theta_5$    | $\theta_6$    | $\theta_7$    |     |
| 广义逆算法                | 0.071 1    | 2.933 7    | -41.437       | -2.206 4      | -92.255       | -127.49       | 89.999        |     |
| 本文算法                 | 0.071 1    | 2.927 0    | -41.441       | -2.199 8      | -92.292       | -127.53       | 89.999        |     |
| 算法                   | $\theta_8$ | $\theta_9$ | $\theta_{10}$ | $\theta_{11}$ | $\theta_{12}$ | $\theta_{13}$ | $\theta_{14}$ |     |
| 广义逆算法                | -56.703    | 41.401     | 94.775        | 131.050       | 89.999        | 51.793        | -41.401       |     |
| 本文算法                 | -56.696    | 41.405     | 94.806        | 131.083       | 89.999        | 51.792        | -41.405       |     |

在上述实例基础上进行实时性比较. 算法运行环境为 mathematica5.2, 分别测试运动仿真时间  $T$  取 5、10、15、20 和 25 s, 即插补次数  $k$  分别为 100、200、300、400 和 500 的结果, 如表 2 所示.

| 表 2 广义逆算法和本文算法计算实时性比较 |           |          |
|-----------------------|-----------|----------|
| 插值次数 $k$              | 广义逆算法耗时/s | 本文算法耗时/s |
| 100                   | 2.859     | 2.047    |
| 200                   | 5.813     | 4.110    |
| 300                   | 8.391     | 6.234    |
| 400                   | 11.378    | 8.328    |
| 500                   | 14.141    | 10.563   |

由表 1 可见, 2 种最小范数逆解结果只有微小误差, 这验证了 2.2 节最小范数逆解算法的正确性, 同时由表 2 可见后者的算法平均耗时只有前者的 0.73 左右, 可见后者提高了算法实时性.

计算得  $M_2$  和  $M_3$  的终点实际位置坐标为

$$g_{st,2}^e = (-0.239\ 2, -0.698\ 6, 1.098\ 5)$$
$$g_{st,3}^e = (-0.360\ 7, -0.698\ 6, 1.098\ 5)$$

实际和期望位置误差仅为  $(-0.000\ 3, -0.001\ 4, -0.001\ 5)$  和  $(0.000\ 4, -0.001\ 4, -0.001\ 5)$ , 结果验证了本文算法的正确性, 机器人终点位形如图 3(b) 所示.

将终点关节值代入正解可计算出物体实际终点

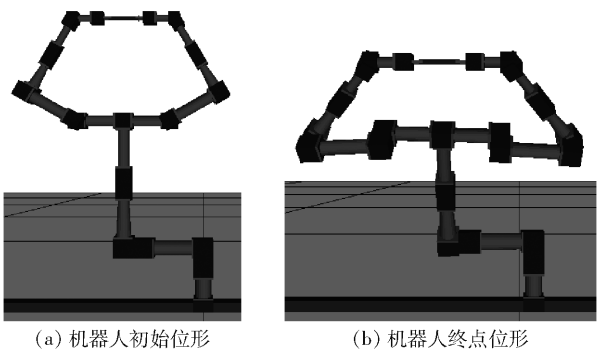


图 3 搬运物体协调操作

位置为 $(-0.300\ 1,-0.699\ 6,1.099\ 5)$ ,计算精度达到了 $1\times 10^{-3}$ ,满足试验精度的要求。

为进一步验证算法的有效性,在 Adams/View 中创建机器人模型并进行运动仿真,仿真数据导入 Matlab 后得到在搬物体过程中的关节变化曲线和目标物体运动位移变化曲线分别如图 4 和图 5 所示。

由图 4 可见,三支机器人关节在搬物体运动过程中轨迹平滑,没有超出关节极限或出现奇异现象。由图 5 可见,目标物体中心运动位移结果亦符合仿真测试实例的运动要求,证明了本文算法的有效性。

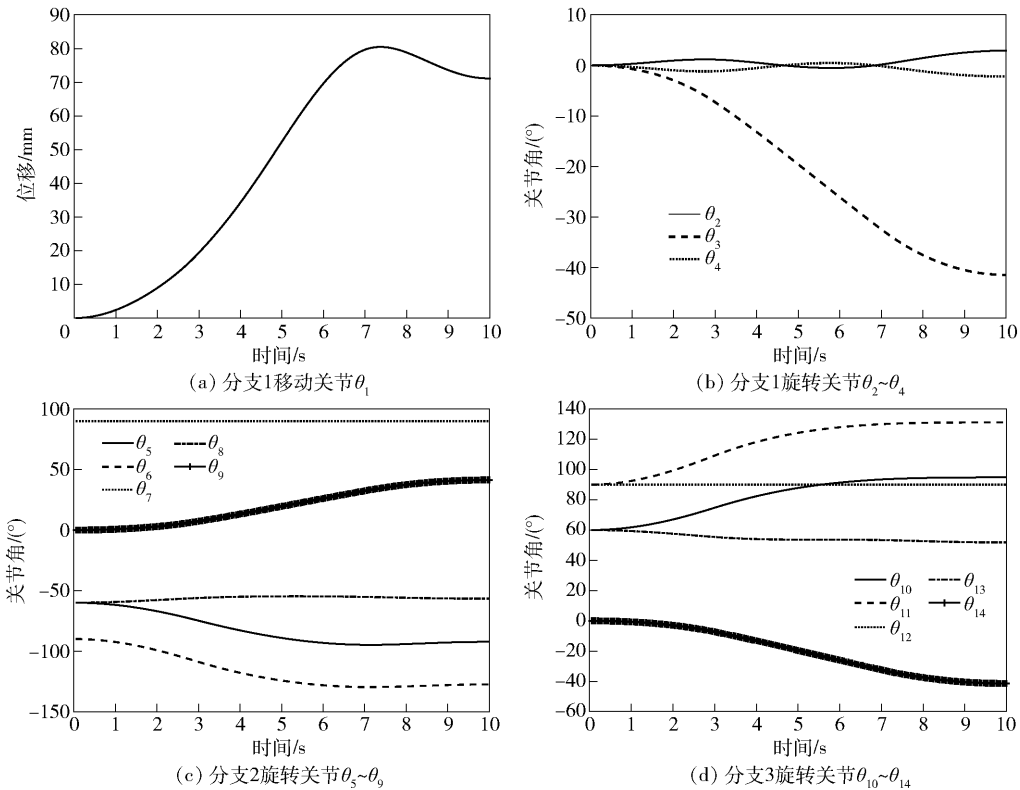


图 4 关节运动变化曲线

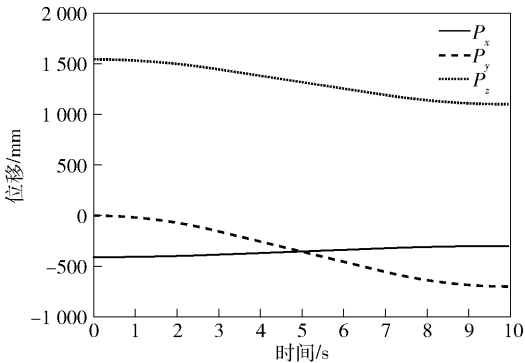


图 5 目标物体中心运动位移曲线

4 结束语

运用线性方程组和条件极值理论,提出了一种具有较高实时性的最小范数逆解算法,并建立了统一的逆运动学求解模型。当操作分支关节数不小于任务空间维数时,可进一步得出更简化的算法形式。通过搬物体协调操作仿真实例,验证了算法的有效性,该算法对速度级控制法的最小范数逆解算做了有效改进,可应用于三支机器人的实际操作。

## 参考文献:

- [1] 刘宏, 蒋再男, 刘业超. 空间机械臂技术发展综述[J]. 载人航天, 2015, 21(5): 435-443.  
Liu Hong, Jiang Zainan, Liu Yechao. Review of space manipulator technology[J]. Manned Space flight, 2015, 21(5): 435-443.
- [2] 孙汉旭, 贾庆轩, 张秋豪, 等. 基于三分支机器人关节空间轨迹规划的研究[J]. 北京邮电大学学报, 2006, 29(3): 81-85.  
Sun Hanxu, Jia Qingxuan, Zhang Qiuhaohao, et al. Trajectory planning in joint space based on tri-branch robot[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 2006, 29(3): 81-85.
- [3] 叶平, 孙汉旭. 具有冗余度的三分支空间机器人逆运动学分析[J]. 机械工程学报, 2005, 41(11): 58-62.  
Ye Ping, Sun Hanxu. Analysis of inverse kinematics for three-branch space robot with redundancy[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(11): 58-62.
- [4] 张宇. 自重构多分支空间机器人动力学与轨迹规划的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2014.
- [5] 赵京东, 韩均广, 倪凤雷, 等. 面向空间站桁架的三分支机器人的步态规划与研究[J]. 载人航天, 2018, 24(1): 14-19.  
Zhao Jingdong, Han Junguang, Ni Fenglei, et al. Gait planning and study of climbing robot with three branches for space station truss[J]. Manned Spaceflight, 2018, 24(1): 14-19.
- ~~~~~
- (上接第40页)
- [11] 何智力, 徐颖, 袁洪, 等. 一种基于二维细化的自适应信号捕获算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(10): 2450-2455.  
He Zhili, Xu Ying, Yuan Hong, et al. Based on two-dimensional refinement adaptive signal acquisition algorithm [J]. Journal of Electronics and Information, 2014, 36(10): 2450-2455.
- [12] 吴皓威, 刘远, 杨力生, 等. 基于差分判决的GPS弱信号长比特相干捕获算法[J]. 华中科技大学学报(自然科学版), 2013, 41(7): 42-46.  
Wu Haowei, Liu Yuan, Yang Lisheng, et al. Longbit coherent acquisition algorithms for GPS weak signals based on differential decision [J]. Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), 2013, 41(7): 42-46.
- [13] 严昆仑, 章红平, 张提升, 等. NH码对新一代GNSS信号捕获跟踪的影响[J]. 武汉大学学报(信息科学版), 2015, 40(5): 682-687.  
Yan Kunlun, Zhang Hongping, Zhang Tisheng, et al. The influence of NH codes on the acquisition and tracking of new generation GNSS signals [J]. Journal of Wuhan University (Information Science Edition), 2015, 40(5): 682-687.
- [14] 李新山, 郭伟. 基于平均相关和差分相干累积的微弱GPSC/A码信号精密捕获算法[J]. 通信学报, 2015, 36(5): 112-119.  
Li Xinshan, Guo Wei. Accurate acquisition algorithm of weak GPS C/A code signal based on mean correlation and differential coherent accumulation [J]. Journal of Communications, 2015, 36(5): 112-119.