

文章编号:1007-5321(2018)01-0095-08

DOI:10.13190/j.jbupt.2017-057

# 利用奇异值和虚假度的证据组合方法

薛大为<sup>1,2</sup>, 王 永<sup>2</sup>, 高康凯<sup>2</sup>

(1. 蚌埠学院 电子与电气工程学院, 安徽 蚌埠 233030; 2. 中国科学技术大学 信息科学技术学院, 合肥 230027)

**摘要:** 针对现有的修正证据源方法多从单一的角度对证据进行评价, 存在一定不足的问题, 提出了一种基于奇异值和虚假度的证据组合新方法. 首先, 利用证据的基本概率分配(BPA)矩阵最小奇异值来衡量两两证据之间的冲突, 并以此为基础定义了证据的可信度; 接着引入证据虚假度对可信度进行修正, 进而生成证据权重; 再利用分配的权重对各证据 BPA 进行加权平均; 最后通过 Dempster 组合规则对加权平均后的 BPA 进行合成. 数值算例结果表明, 该方法能够有效地对冲突证据进行组合, 且具有更快的收敛速度和更好的聚焦效果.

**关键词:** 证据理论; 证据组合; 证据冲突; 奇异值; 虚假度

**中图分类号:** TP274

**文献标志码:** A

## Evidence Combination Method Based on Singular Value and Falsity

XUE Da-wei<sup>1,2</sup>, WANG Yong<sup>2</sup>, GAO Kang-kai<sup>2</sup>

(1. School of Electronics and Electrical Engineering, Anhui Bengbu University, Anhui Bengbu 233030, China;

2. School of Information Science and Technology, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

**Abstract:** Most researchers think that modifying evidence source based methods are more reasonable to deal with the problem of conflicting evidence combination. However, most existing methods of modifying evidence source, which generally evaluate the evidence from single angle, have some deficiencies. To resolve such a problem, a new evidence combination method based on singular value and falsity is proposed. Firstly, conflict between two evidences is measured by the minimum singular value of the matrix composed of basic probability assignment (BPA) corresponding to two evidences, on the basis of which the definition of credibility of evidence is presented. Then, the weights which are used to average BPAs of evidences are produced by modifying the credibility with the falsity of evidences. Finally, the weighted average of BPAs is fused by Dempster's rule of combination. The numerical examples illustrate that the presented method can combine conflicting evidences effectively, and has faster convergence speed and better focusing degree than some existing methods.

**Key words:** evidence theory; evidence combination; evidence conflict; singular value; falsity

多传感器信息融合在现实中被越来越多地使用. 然而, 这些传感器信息由于受到测量精度、外界干扰以及一些不明因素的影响, 不可避免的存在一定程度的不确定性. 如何描述和处理这些不确定信

息进而做出判断和决策是一个重要问题. D-S (Dempster-Shafer) 证据理论<sup>[1-2]</sup>作为贝叶斯理论的拓展, 可以在不需要先验知识的情况下对不确定信息进行融合和处理, 并能区分“不知道”和“不确

收稿日期: 2017-04-14

基金项目: 国家自然科学基金项目(61573332); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(WK2100100017)

作者简介: 薛大为(1976—), 男, 副教授, E-mail: bbxuedawei@163.com.

定”,是一种有效的不确定表示和推理方法,在模式识别<sup>[3-4]</sup>、故障诊断<sup>[5-6]</sup>、目标识别<sup>[7-8]</sup>等多个领域得到了广泛应用. Dempster 组合规则是 D-S 证据理论的核心部分,但对高冲突证据进行组合时,常常会出现与直观相悖的结果. 针对这一问题,国内外学者进行了大量研究,并提出了多种改进方法. 一部分学者认为 Dempster 组合规则存在缺陷,主张通过修改组合规则将冲突在全局或局部上进行重新分配<sup>[9-12]</sup>;另一部分学者则认为不是 Dempster 组合规则的问题,而是证据源模型不准确,主张在组合前对证据进行预处理来修正证据源. 对组合规则的修改不仅计算复杂而且破坏了 Dempster 组合规则满足结合律、交换律的性质,在工程实践中难以进行推广. 因此,多数研究者更倾向于采用修正证据源的思想,正如 Haenni<sup>[13]</sup>所认为的对数据模型的修改无论在工程、数学和哲学上来说都更为合理.

基于修正证据源的思想主要有 2 种方法:一种是加权平均法;另一种是折扣系数法. 基于第 1 种方法, Murphy<sup>[14]</sup>先将证据进行算术平均,然后再利用 Dempster 组合规则对平均后的证据进行组合,有效地抑制了干扰对合成结果的影响,取得了较好的收敛速度和聚焦效果. 在此基础上 Deng 等<sup>[15]</sup>进行了改进,根据证据之间的相互支持程度分配不同的权重,更好地抑制了干扰的影响,收敛速度和聚焦效果进一步增强. 基于第 2 种方法,胡昌华等<sup>[16]</sup>先利用证据间 Pignistic 概率距离评价出证据的可靠度,并引入信息熵构造折扣系数,然后利用 Dempster 组合规则对折扣后的证据进行组合,获得了良好的融合效果. 在上述典型方法基础上,研究者还陆续提出了一些新的组合方法<sup>[17-19]</sup>. 通过分析可知,这些方法通常先依据某种度量规则评价出每个证据的可信度或可靠度,再据此分配给每个证据不同的权重或折扣系数,以达到抑制冲突证据对合成结果的影响的目的,其本质上都可看作不同的权重赋值方法. 由于影响证据合成结果的因素较多,现有修正证据源的方法往往只是从单一的角度对证据进行评价,考虑不够全面,存在一定的不足.

笔者通过构造证据基本概率分配 (BPA, basic probability assignment) 矩阵,利用 BPA 矩阵最小奇异值衡量证据间的冲突,与其他冲突衡量方法相比该方法更为准确. 但奇异值只能对 2 个证据之间的冲突程度进行有效衡量,却无法衡量多个证据之间的全局冲突程度. 证据虚假度可以在一定程度上弥

补奇异值这一不足,两者可从不同的角度反映证据的可信性. 基于以上考虑,将奇异值与虚假度相结合提出了一种新的证据组合方法,并通过数值算例验证了方法的有效性.

## 1 理论基础

设  $\Theta$  是由两两互斥元素组成的识别框架,  $2^\Theta$  为  $\Theta$  的幂集,是由其所有子集构成的集合.

**定义 1** 令  $\Theta$  为识别框架,若  $m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ , 并满足以下条件<sup>[2]</sup>:

$$\left. \begin{aligned} m(A) &\geq 0, \forall A \subseteq \Theta \\ \sum_{A \subseteq \Theta} m(A) &= 1 \\ m(\emptyset) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中  $\emptyset$  为空集,则称  $m$  为一个 BPA,也称为 mass 函数. 若  $m(A) > 0$ ,则称  $A$  为焦点.

**定义 2** 设  $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$  是识别框架  $\Theta$  上的  $n$  个 BPA,则 Dempster 组合规则<sup>[2]</sup>为

$$m(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ \frac{\sum_{\cap A_j = A} \prod_{i=1}^n m_i(A_j)}{1-k}, & A \neq \emptyset \end{cases} \quad (2)$$

其中  $k$  称为冲突系数<sup>[2]</sup>,定义为

$$k = \sum_{\cap A_j = \emptyset} \prod_{i=1}^n m_i(A_j) \quad (3)$$

冲突系数  $k$  用于描述证据之间的冲突程度,  $k$  越大冲突越大. Dempster 组合规则满足结合律和交换律等性质,是证据组合中最常用的规则.

**定义 3** 若  $m$  为识别框架  $\Theta$  上的 BPA,  $\text{Bet}P_m: 2^\Theta \rightarrow [0, 1]$ ,且满足以下条件<sup>[20]</sup>:

$$\text{Bet}P_m(A) = \sum_{A \subseteq B \subseteq \Theta} \frac{|A \cap B|}{|B|} \frac{m(B)}{1 - m(\emptyset)}, \forall A \subseteq \Theta \quad (4)$$

其中  $|B|$  为子集  $B$  中包含元素的个数,则称  $\text{Bet}P_m$  为  $\Theta$  上与  $m$  对应的 Pignistic 概率转换函数.

## 2 新的证据组合方法

加权平均法和折扣系数法是修正证据源的 2 种主要方法,各有优劣. 目前针对如何评价证据组合方法的性能还没有统一的标准,收敛速度与聚焦效果是普遍采用的 2 个指标. 由于折扣系数法需要将证据的不可靠部分概率赋予识别框架,再通过证据间的组合进行重新分配,对收敛速度和聚焦效果都

会造成不利的影响,从这个角度分析,加权平均法具有一定的优势. 因此,笔者采用加权平均法. 首先利用奇异值计算出两两证据间的冲突及相近度,并以此为基础定义证据可信度;再利用证据虚假度对证据可信度进行修正生成证据权重,  $n$  个证据 BPA 根据分配的权重进行加权平均;最后利用 Dempster 规则对加权平均后的证据组合  $n-1$  次得到最终合成结果.

## 2.1 常用证据冲突衡量方法及其不足

冲突系数  $k$  是由 Shafer 提出的关于证据冲突衡量最常用的方法,然而在实际应用中并不总是有效,如例 1 所示.

**例 1** 设识别框架  $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ , 有 2 组证据 BPA.

第 1 组:  $m_1(\{\omega_1\}) = 0.2, m_1(\{\omega_2\}) = 0.2, m_1(\{\omega_3\}) = 0.2, m_1(\{\omega_4\}) = 0.2, m_1(\{\omega_5\}) = 0.2$ ;  
 $m_2(\{\omega_1\}) = 0.2, m_2(\{\omega_2\}) = 0.2, m_2(\{\omega_3\}) = 0.2, m_2(\{\omega_4\}) = 0.2, m_2(\{\omega_5\}) = 0.2$ .

第 2 组:  $m_1(\{\omega_1\}) = 0.8, m_1(\{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}) = 0.2; m_2(\Theta) = 1$ .

根据式(3)计算可得,第 1 组证据的冲突系数  $k = 0.8$ ,第 2 组证据的冲突系数  $k = 0$ . 依据计算结果,第 1 组完全相同的证据被判定存在较大冲突,明显与实际不符;而第 2 组存在较大差异的证据被判定没有冲突,也明显不合理. 由此可见,冲突系数  $k$  衡量证据冲突存在不足. 针对这一问题,研究人员先后提出了一些新的衡量方法. 比较典型的有以下几种.

**定义 4** 若  $m_1, m_2$  是识别框架  $\Theta$  上的 2 个 BPA,  $\Theta$  由  $n$  个互斥元素构成,则  $m_1$  与  $m_2$  之间的 Jousselme 证据距离<sup>[21]</sup>为

$$d_{\text{BPA}}(m_1, m_2) = \sqrt{\frac{1}{2}(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)^T D(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2)} \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{m}_1$  与  $\mathbf{m}_2$  分别为  $m_1, m_2$  对应的  $2^n$  维列向量表示形式;  $D$  为  $2^n \times 2^n$  矩阵,其元素为

$$D(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}, A, B \subseteq \Theta \quad (6)$$

**定义 5** 若识别框架  $\Theta$  上的 2 个 BPA 为  $m_1, m_2$ , 其相应的 Pignistic 概率转换分别为  $\text{Bet}P_{m_1}, \text{Bet}P_{m_2}$ , 则  $m_1$  与  $m_2$  之间的 Pignistic 概率距离<sup>[22]</sup>为

$$\text{difBet}P(m_1, m_2) = \max_{A \subseteq \Theta} (|\text{Bet}P_{m_1}(A) - \text{Bet}P_{m_2}(A)|) \quad (7)$$

$d_{\text{BPA}}$  通过引入 BPA 空间向量利用向量距离来衡

量证据之间冲突,而  $\text{difBet}P$  通过引入 BPA 的 Pignistic 概率转换利用 Pignistic 概率距离来衡量证据之间冲突. 另外,在此基础上有些学者还提出了一些新的冲突衡量方法. 比如,蒋雯等<sup>[23]</sup>提出了利用冲突系数  $k$  与  $d_{\text{BPA}}$  的算术平均、李昌玺等<sup>[19]</sup>提出了利用冲突系数  $k$  与  $\text{difBet}P$  的均方根来衡量证据冲突. 但这 2 种方法在衡量 2 个完全相同的证据时和利用冲突系数  $k$  相似可能会出现明显的偏差. 比较而言,  $d_{\text{BPA}}$  和  $\text{difBet}P$  方法要更为合理. 如例 1 中的 2 组证据,利用式(5)计算  $d_{\text{BPA}}$  分别为 0、0.732 1;利用式(7)计算  $\text{difBet}P$  分别为 0、0.6. 2 种方法的判断结果都与实际相符,在一定程度上克服了冲突系数  $k$  的缺陷.

**例 2** 设识别框架  $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , 有 3 个证据的 BPA 如下:

$$m_1(\{\omega_1\}) = 1; m_2(\{\omega_1\}) = 1/3, m_2(\{\omega_2\}) = 1/3, m_2(\{\omega_3\}) = 1/3; m_3(\Theta) = 1$$

从直观上分析,  $m_1$  完全支持  $\omega_1$ ,  $m_2$  部分支持  $\omega_1$ , 而  $m_3$  不直接支持  $\omega_1$ , 因此  $m_1$  与  $m_3$  之间的冲突较  $m_1$  与  $m_2$  之间的冲突要大. 在证据理论中代表 2 个不同概念,  $m_2$  表示不确定,  $m_3$  表示不知道, 因此两者也存在一定冲突但相对较小. 由此可得, 3 个证据之间的冲突关系应为  $\text{conf}(m_1, m_3) > \text{conf}(m_1, m_2) > \text{conf}(m_2, m_3)$ . 现用  $d_{\text{BPA}}$  和  $\text{difBet}P$  对 3 个证据之间的冲突进行衡量, 根据式(5)计算  $d_{\text{BPA}}$  为:  $d_{\text{BPA}}(m_1, m_3) = 0.816 5, d_{\text{BPA}}(m_1, m_2) = 0.577 4, d_{\text{BPA}}(m_2, m_3) = 0.577 4$ ; 根据式(7)计算  $\text{difBet}P$  为:  $\text{difBet}P(m_1, m_3) = 0.666 7, \text{difBet}P(m_1, m_2) = 0.666 7, \text{difBet}P(m_2, m_3) = 0$ . 可见, 2 种方法对于冲突的判别都与分析结果存在偏差, 仍然存在一定的不足.

## 2.2 奇异值衡量证据冲突方法

奇异值衡量证据冲突的思想来源于对一种 2 行矩阵性质的分析, 矩阵 2 行元素差异大小的变化与矩阵的最小奇异值大小变化保持一致. 在以前的研究中曾采用证据焦元矩阵的最小奇异值来衡量证据间的冲突<sup>[24]</sup>, 该方法虽然结构简单, 但也造成了部分信息的损失. 为此, 对其进行了相应的改进.

**定义 6** 若识别框架  $\Theta$  上的 2 个 BPA 为  $m_1, m_2$ ,  $\Theta$  由  $n$  个互斥元素构成, 则  $m_1$  与  $m_2$  可分别视为  $2^n$  维的行向量  $\mathbf{m}_1$  与  $\mathbf{m}_2$ . 则 2 个 BPA 对应的矩阵定义为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} m_1(C_1) & m_1(C_2) & \cdots & m_1(C_{2^n}) \\ m_2(C_1) & m_2(C_2) & \cdots & m_2(C_{2^n}) \end{bmatrix}, C_i \subseteq \Theta \quad (8)$$

其中,如果  $C_i$  不是  $m_i$  的焦元,则  $m_i(C_i)$  取零.

**定义7** 若识别框架  $\Theta$  上的 2 个 BPA 为  $m_1$ 、 $m_2$ , 对应的 BPA 矩阵为  $\mathbf{H}$ , 则  $m_1$  与  $m_2$  之间的冲突度量定义为

$$d_{sv} = \min(\sigma(\mathbf{HD})) \quad (9)$$

其中:  $\sigma(\mathbf{HD})$  为矩阵  $\mathbf{HD}$  的奇异值;  $\mathbf{D}$  为  $2^n \times 2^n$  矩阵, 其元素为

$$\mathbf{D}(A_i, A_j) = \frac{|A_i \cap A_j|}{|A_i \cup A_j|}, A_i, A_j \in 2^\Theta \quad (10)$$

由式(9)可以看出,该方法既考虑了 2 个证据 BPA 大小的差异,也考虑了其元素之间的联系,分析更加全面. 利用该方法对例 1 中的 2 组证据冲突进行衡量可得  $d_{sv}$  分别为 0 和 0.670 5, 判断结果与实际相符. 对例 2 中 3 个证据 BPA 经计算可得  $d_{sv}(m_1, m_3) = 0.666\ 7 > d_{sv}(m_1, m_2) = 0.441\ 9 > d_{sv}(m_2, m_3) = 0.296\ 1$ , 证据之间的冲突程度与前述分析结果一致.

可见,  $d_{sv}$  能够正确地衡量 2 个证据之间的冲突,并且与其他一些常用方法相比更为合理和有效. 另外,容易证明  $d_{sv}$  还满足以下性质:

- 1)  $0 \leq d_{sv}(m_1, m_2) \leq 1$ ;
- 2)  $d_{sv}(m_1, m_2) = d_{sv}(m_2, m_1)$ ;
- 3)  $m_1 = m_2 \Leftrightarrow d_{sv}(m_1, m_2) = 0$ .

### 2.3 证据可信度

根据前述可知,如果 2 个证据 BPA 矩阵的  $d_{sv}$  越大,则证据间的冲突越大相近度越低,反之冲突越小相近度越高. 相近度同时也反映了 2 个证据间的相互支持程度,相近度越高支持程度越高,反之亦然.

**定义8** 若识别框架  $\Theta$  上的 2 个 BPA 为  $m_1$ 、 $m_2$ , 则  $m_1$  与  $m_2$  之间的相近度定义为

$$\text{Sim}(m_1, m_2) = 1 - d_{sv}(m_1, m_2) \quad (11)$$

如果识别框架  $\Theta$  上有  $n$  个证据  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 则两两证据间的相近度可表示为如下矩阵形式:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} (m_1, m_1) & (m_1, m_2) & \cdots & (m_1, m_n) \\ (m_2, m_1) & (m_2, m_2) & \cdots & (m_2, m_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (m_n, m_1) & (m_n, m_2) & \cdots & (m_n, m_n) \end{bmatrix} \quad (12)$$

由于  $\text{Sim}(m_i, m_i) = 1$ ,  $\text{Sim}(m_i, m_j) = \text{Sim}(m_j, m_i)$ , 因此,  $\mathbf{S}$  矩阵是一个主对角线为 1 的对称矩阵.

**定义9** 若识别框架  $\Theta$  上有  $n$  个证据  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 则证据  $m_i$  的可信度定义为

$$\text{Crd}(m_i) = \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sim}(m_i, m_j)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sim}(m_i, m_j)} \quad (13)$$

其中:  $\sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sim}(m_i, m_j)$  为证据  $m_i$  与其他证据间的相近度之和, 表示证据  $m_i$  被其他证据支持程度;

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n \text{Sim}(m_i, m_j)$  是所有证据被支持程度之和, 为归一化因子. 通常情况下, 如果一个证据被其他证据支持程度越高, 那么有理由相信该证据越可信, 在证据组合中应适当增大其权重, 以加强其对合成结果的影响. 但  $d_{sv}$  只能对两两证据之间的冲突进行正确衡量, 而无法有效衡量某一证据对于所有证据间全局冲突的影响, 且证据的可信度仅仅通过两两证据间的相近度之和来确定理由又不够充分. 比如, 同一识别框架下有 4 个证据分别为  $m_1, m_2, m_3, m_4$ , 且有  $\text{Sim}(m_1, m_2) = 0.05$ ,  $\text{Sim}(m_1, m_3) = 0.05$ ,  $\text{Sim}(m_1, m_4) = 0.8$ ;  $\text{Sim}(m_2, m_1) = 0.05$ ,  $\text{Sim}(m_2, m_3) = 0.5$ ,  $\text{Sim}(m_2, m_4) = 0.35$ . 证据  $m_1$  和  $m_2$  被其他证据支持程度相同都是 0.9, 根据式(13)其可信度也相同, 如果以此可信度作为证据权重, 2 个证据分配权重相同, 其对于合成结果的影响也相同, 这显然是不尽合理的. 因此, 有必要对证据可信度做进一步修正.

### 2.4 证据虚假度

证据虚假度(falsity)由 Schubert 提出, 是一种基于冲突系数  $k$  定义的证据冲突度量方法.

**定义10** 设识别框架  $\Theta$  上的  $n$  个 BPA 分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ,  $k_0$  为  $n$  个 BPA 的全局冲突系数,  $k_j$  为去除  $m_j$  之后剩余证据的冲突系数, 则证据  $m_j$  的虚假度定义<sup>[25]</sup>为

$$F(m_j) = \frac{k_0 - k_j}{1 - k_j} \quad (14)$$

其中

$$k_0 = \sum_{\cap A_k = \emptyset} \prod_{i=1}^n m_i(A_k) \quad (15)$$

$$k_j = \sum_{\cap A_k = \emptyset} \prod_{i=1, i \neq j}^n m_i(A_k) \quad (16)$$

由于  $1 \geq k_0 \geq k_j$ , 故  $1 \geq F(m_j) \geq 0$ . 根据式

(14), 当  $F(m_j) = 0$  时, 则  $k_0 = k_j$ , 说明  $m_j$  对全局冲突没有影响; 当  $F(m_j) = 1$  时, 则  $k_0 = 1$  且  $k_j \neq 1$ , 说明  $m_j$  为主要冲突证据; 当  $1 > F(m_j) > 0$  时, 说明  $m_j$  对全局冲突有影响, 且  $F(m_j)$  越大, 对全局冲突的贡献越大. 特别地, 当只有 2 个证据  $m_1, m_2$  时,  $F(m_1) = F(m_2) = k_0$ .

## 2.5 证据权重分配

通过上述分析可知, 利用  $d_{sv}$  确定的证据可信度是建立在两两证据之间冲突(支持程度)基础上的, 存在一定的不足, 而证据的虚假度可以从全局冲突的角度反映证据的可信性, 两者具有一定的互补性, 可以将两者结合起来以确定证据的权重. 如果一证据可信度较高且虚假度较小, 则该证据更为可信, 应进一步加大其权重以加强其对合成结果的影响; 如果一证据可信度较低且虚假度较大, 则该证据更加不可信, 应进一步减小其权重以削弱其对合成结果的影响. 因此, 利用虚假度对建立在  $d_{sv}$  基础上的证据信任度进行修正以生成证据权重.

**定义 11** 设识别框架  $\Theta$  上的  $n$  个 BPA 分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 则证据的权重定义为

$$\beta(m_i) = \frac{\text{Crd}(m_i) \exp(-\alpha F(m_i))}{\sum_{i=1}^n [\text{Crd}(m_i) \exp(-\alpha F(m_i))]} \quad (17)$$

其中  $\alpha > 0$  为负指数函数参数,  $\alpha$  取值越大对于虚假度大的证据抑制作用越强.

式(17)中,  $\text{Crd}(m_i) \exp(-\alpha F(m_i))$  为虚假度对可信度的修正,  $\sum_{i=1}^n [\text{Crd}(m_i) \exp(-\alpha F(m_i))]$  为归一化因子. 以  $\beta(m_i)$  作为权重按照如下方式对所有证据 BPA 进行加权平均:

$$m_{WAE} = \sum_{i=1}^n (\beta(m_i) m_i) \quad (18)$$

容易验证  $m_{WAE}$  满足定义 1 中的 3 个条件, 是识别框架  $\Theta$  上的一个 BPA.

## 2.6 证据组合步骤

对识别框架  $\Theta$  上  $n$  个证据的 BPA 分别为  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , 利用奇异值与虚假度的证据组合步骤可总结如下:

- 1) 利用  $d_{sv}$  计算出两两证据之间的冲突和相近度;
- 2) 由两两证据之间的相近度计算出每个证据的可信度;
- 3) 计算出每个证据的虚假度;

4) 利用虚假度对可信度进行修正并生成各证据权重;

5) 利用权重对所有证据 BPA 进行加权平均;

6) 对加权平均后的 BPA 利用 Dempster 规则组合  $n-1$  次, 得到最终融合结果.

## 3 数值算例

为了验证所提方法的有效性, 通过对算例利用不同组合方法的融合结果对比分析来说明.

**例 3** 针对某隔振系统常见故障诊断中, 设识别框架  $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ , 其中  $\omega_1$  表示信号中断,  $\omega_2$  表示负载受到外力,  $\omega_3$  表示激振频率突变. 利用 5 个不同传感器进行检测, 根据传感器测量数据可得到以下证据:

$$\begin{aligned} m_1(\{\omega_1\}) &= 0.5, m_1(\{\omega_2\}) = 0.2, m_1(\{\omega_3\}) = 0.3; \\ m_2(\{\omega_1\}) &= 0, m_2(\{\omega_1\}) = 0.9, m_2(\{\omega_3\}) = 0.1; \\ m_3(\{\omega_1\}) &= 0.55, m_3(\{\omega_2\}) = 0.1, m_3(\{\omega_3\}) = 0.35; \\ m_4(\{\omega_1\}) &= 0.55, m_4(\{\omega_2\}) = 0.1, m_4(\{\omega_3\}) = 0.35; \\ m_5(\{\omega_1\}) &= 0.55, m_5(\{\omega_2\}) = 0.1, m_5(\{\omega_3\}) = 0.35. \end{aligned}$$

几种组合方法的合成结果如表 1 所示. 其中所提方法中  $\alpha = 3$ ,  $\alpha$  取值越大对虚假度大的证据抑制作用越明显, 同时也会对有用信息产生抑制作用, 因此不宜过大. 根据表 1, Dempster 组合规则无法有效融合冲突证据, 由于  $m_2(\{\omega_1\}) = 0$ , 不管其后的证据对  $\{\omega_1\}$  的支持度有多高, 合成结果  $m(\{\omega_1\})$  始终为 0. 文献[9,11]方法都是属于修改证据组合规则的方法, 2 种方法的组合结果效果都不理想. 文献[9]方法的合成结果  $m(\{\omega_1\})$  也始终为 0, 并且随着证据的增加,  $m(\Theta)$  不断增大, 无法形成有效决策. 文献[11]方法对文献[9]方法进行了改进, 随着证据数量增加  $m(\{\omega_1\})$  增大但收敛速度较慢且  $m(\Theta)$  减小不明显, 收集 5 个证据仍然无法形成有效决策. 文献[14-16]方法及所提方法都是属于修正证据源的方法, 几种方法最终都能形成准确决策, 效果明显优于修改组合规则的方法. 文献[14-15]方法和所提方法都是加权平均法, 文献[14]方法只是对证据进行简单平均分配相同的权重, 没有考虑证据之间的差异性, 证据增加到 4 个时才能做出准确决策. 文献[15]方法在文献[14]方法上进行了

改进,通过引入证据距离评价证据的可信度进而分配不同的权重,在增加到第 3 个证据时便可做出正确决策,收敛速度和聚焦效果明显增强. 所提方法也是在增加到第 3 个证据时形成正确决策,但合成结果  $m(\{\omega_1\})$  数值要大于文献[15]方法,说明所提方法收敛速度和聚焦效果要更好,更利于在较少证据下形成准确决策,这是因为所提方法同时考虑了

可信度和虚假度,从 2 个角度对证据的可信性进行了综合评价,所以权重分配更加合理. 文献[16]方法是证据折扣法,通过将不可靠部分概率赋予识别框架  $\Theta$ ,再利用 Dempster 组合规则进行重新分配,该方法虽然在证据增加到第 3 个时就形成了正确决策,但合成结果  $m(\{\omega_1\})$  数值明显小于文献[15]方法和所提方法,收敛速度和聚焦效果要稍差一些.

表 1 几种组合方法的合成结果

组合方法	组合证据			
	$m_1, m_2$	$m_1, m_2, m_3$	$m_1, m_2, m_3, m_4$	$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$
Dempster 方法	$m(\{\omega_1\}) = 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.857\ 1$	$m(\{\omega_2\}) = 0.631\ 6$	$m(\{\omega_2\}) = 0.328\ 8$	$m(\{\omega_2\}) = 0.122\ 8$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.142\ 9$	$m(\{\omega_3\}) = 0.368\ 4$	$m(\{\omega_3\}) = 0.671\ 2$	$m(\{\omega_3\}) = 0.877\ 2$
文献[9]方法	$m(\{\omega_1\}) = 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.180\ 0$	$m(\{\omega_2\}) = 0.018\ 0$	$m(\{\omega_2\}) = 0.001\ 8$	$m(\{\omega_2\}) = 0.000\ 2$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.030\ 0$	$m(\{\omega_3\}) = 0.010\ 5$	$m(\{\omega_3\}) = 0.003\ 7$	$m(\{\omega_3\}) = 0.001\ 3$
	$m(\Theta) = 0.790\ 0$	$m(\Theta) = 0.971\ 5$	$m(\Theta) = 0.994\ 5$	$m(\Theta) = 0.998\ 5$
文献[11]方法	$m(\{\omega_1\}) = 0.089\ 6$	$m(\{\omega_1\}) = 0.159\ 8$	$m(\{\omega_1\}) = 0.194\ 1$	$m(\{\omega_1\}) = 0.210\ 0$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.377\ 72$	$m(\{\omega_2\}) = 0.183\ 0$	$m(\{\omega_2\}) = 0.159\ 5$	$m(\{\omega_2\}) = 0.150\ 4$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.101\ 7$	$m(\{\omega_3\}) = 0.115\ 3$	$m(\{\omega_3\}) = 0.137\ 2$	$m(\{\omega_3\}) = 0.141\ 1$
	$m(\Theta) = 0.431\ 5$	$m(\Theta) = 0.541\ 9$	$m(\Theta) = 0.509\ 2$	$m(\Theta) = 0.498\ 5$
文献[14]方法	$m(\{\omega_1\}) = 0.154\ 3$	$m(\{\omega_1\}) = 0.350\ 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0.602\ 7$	$m(\{\omega_1\}) = 0.795\ 8$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.746\ 9$	$m(\{\omega_2\}) = 0.522\ 4$	$m(\{\omega_2\}) = 0.262\ 7$	$m(\{\omega_2\}) = 0.093\ 2$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.098\ 8$	$m(\{\omega_3\}) = 0.127\ 6$	$m(\{\omega_3\}) = 0.134\ 6$	$m(\{\omega_3\}) = 0.111\ 0$
文献[15]方法	$m(\{\omega_1\}) = 0.154\ 3$	$m(\{\omega_1\}) = 0.581\ 6$	$m(\{\omega_1\}) = 0.806\ 0$	$m(\{\omega_1\}) = 0.890\ 9$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.746\ 9$	$m(\{\omega_2\}) = 0.243\ 9$	$m(\{\omega_2\}) = 0.048\ 2$	$m(\{\omega_2\}) = 0.008\ 6$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.098\ 8$	$m(\{\omega_3\}) = 0.174\ 5$	$m(\{\omega_3\}) = 0.145\ 8$	$m(\{\omega_3\}) = 0.100\ 5$
文献[16]方法	$m(\{\omega_1\}) = 0.155\ 8$	$m(\{\omega_1\}) = 0.554\ 8$	$m(\{\omega_1\}) = 0.705\ 3$	$m(\{\omega_1\}) = 0.800\ 7$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.398\ 7$	$m(\{\omega_2\}) = 0.114\ 0$	$m(\{\omega_2\}) = 0.025\ 6$	$m(\{\omega_2\}) = 0.005\ 4$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.134\ 0$	$m(\{\omega_3\}) = 0.332\ 2$	$m(\{\omega_3\}) = 0.268\ 1$	$m(\{\omega_3\}) = 0.193\ 9$
	$m(\Theta) = 0.311\ 5$	$m(\Theta) = 0$	$m(\Theta) = 0$	$m(\Theta) = 0$
所提方法	$m(\{\omega_1\}) = 0.154\ 3$	$m(\{\omega_1\}) = 0.634\ 3$	$m(\{\omega_1\}) = 0.834\ 7$	$m(\{\omega_1\}) = 0.927\ 1$
	$m(\{\omega_2\}) = 0.746\ 9$	$m(\{\omega_2\}) = 0.187\ 2$	$m(\{\omega_2\}) = 0.023\ 1$	$m(\{\omega_2\}) = 0.004\ 4$
	$m(\{\omega_3\}) = 0.098\ 8$	$m(\{\omega_3\}) = 0.178\ 5$	$m(\{\omega_3\}) = 0.142\ 2$	$m(\{\omega_3\}) = 0.068\ 5$

例 3 中证据都为单子集焦元,下面以含有多子集焦元证据为例,对所提方法和文献[15]方法进行对比分析,进一步验证所提方法的有效性.

例 4 在某一空中多目标识别系统中,设识别框架  $\Theta = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ ,其中  $\omega_1$  代表民航客机,  $\omega_2$  代表轰炸机,  $\omega_3$  代表导弹;对于两者组合,如  $\{\omega_1, \omega_2\}$  表示民航客机或轰炸机,具体无法确定. 通过 5 个不同传感器获取的证据如下:

$m_1(\{\omega_1\}) = 0.4, m_1(\{\omega_2\}) = 0.2, m_1(\{\omega_3\}) =$

$0.1, m_1(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.3; m_2(\{\omega_1\}) = 0.75, m_2(\{\omega_1\}) = 0.15, m_2(\{\omega_3\}) = 0.05, m_2(\Theta) = 0.05; m_3(\{\omega_1\}) = 0, m_3(\{\omega_2\}) = 0.9, m_3(\{\omega_3\}) = 0.1; m_4(\{\omega_1\}) = 0.35, m_4(\{\omega_2\}) = 0.15, m_4(\{\omega_3\}) = 0.25, m_4(\{\omega_1, \omega_2\}) = 0.2, m_4(\Theta) = 0.05; m_5(\{\omega_1\}) = 0.5, m_5(\{\omega_2\}) = 0.1, m_5(\{\omega_2, \omega_3\}) = 0.15, m_5(\Theta) = 0.25.$

从 5 个证据的 BPA 可以看出,除了证据  $m_3$  对  $\{\omega_2\}$  有较大支持程度外,其他 4 个证据都比较倾向

于 $\{\omega_1\}$ ,因此可以判断证据 $m_3$ 为干扰项,合理的决策结果应该为 $\{\omega_1\}$ . 所提方法和文献[15]方法的合成结果如表 2 所示. 其中所提方法 $\alpha=3$ 与例 4 相同. 根据表 2,2 种组合方法的最终合成结果对 $\{\omega_1\}$ 的支持度都是最高的,都能做出正确决策,与直观分析结果一致. 从合成过程可以看出,当干扰证据 $m_3$ 加入时,2 种方法合成结果对 $\{\omega_1\}$ 支持度都

有所降低,但所提方法下降相对较小. 这是因为所提方法中引入了虚假度对证据可信度进行了修正,对于证据 $m_1$ 、 $m_2$ 、 $m_3$ ,证据 $m_3$ 的虚假度较大达到了 0.87,通过修正减小了其权重,所以更有效抑制了其对合成结果的影响,也进一步增强了合成的收敛速度和聚焦效果.

表 2 2 种组合方法的合成结果

组合方法	组合证据			
	$m_1, m_2$	$m_1, m_2, m_3$	$m_1, m_2, m_3, m_4$	$m_1, m_2, m_3, m_4, m_5$
文献[15]方法	$m(\{\omega_1\})=0.805\ 2$	$m(\{\omega_1\})=0.589\ 9$	$m(\{\omega_1\})=0.713\ 3$	$m(\{\omega_1\})=0.811\ 0$
	$m(\{\omega_2\})=0.118\ 5$	$m(\{\omega_2\})=0.391\ 0$	$m(\{\omega_2\})=0.273\ 8$	$m(\{\omega_2\})=0.181\ 4$
	$m(\{\omega_3\})=0.018\ 9$	$m(\{\omega_3\})=0.004\ 8$	$m(\{\omega_3\})=0.005\ 0$	$m(\{\omega_3\})=0.004\ 5$
	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.053\ 9$	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.014\ 2$	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.007\ 9$	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.002\ 9$
	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$
	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0.000\ 2$
	$m(\Theta)=0.003\ 6$	$m(\Theta)=0.000\ 1$	$m(\Theta)=0$	$m(\Theta)=0$
所提方法	$m(\{\omega_1\})=0.805\ 2$	$m(\{\omega_1\})=0.631\ 6$	$m(\{\omega_1\})=0.743\ 7$	$m(\{\omega_1\})=0.839\ 4$
	$m(\{\omega_2\})=0.118\ 5$	$m(\{\omega_2\})=0.351\ 1$	$m(\{\omega_2\})=0.244\ 5$	$m(\{\omega_2\})=0.153\ 9$
	$m(\{\omega_3\})=0.018\ 9$	$m(\{\omega_3\})=0.004\ 8$	$m(\{\omega_3\})=0.005\ 1$	$m(\{\omega_3\})=0.003\ 9$
	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.053\ 9$	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.012\ 4$	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.006\ 7$	$m(\{\omega_1, \omega_2\})=0.002\ 4$
	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_1, \omega_3\})=0$
	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0$	$m(\{\omega_2, \omega_3\})=0.000\ 4$
	$m(\Theta)=0.003\ 6$	$m(\Theta)=0.000\ 1$	$m(\Theta)=0$	$m(\Theta)=0$

4 结束语

Dempster 组合规则在合成高冲突证据时会出现有悖于直观的结果,针对这一问题笔者提出了奇异值与虚假度结合修正证据源的新的证据组合方法. 2 个证据 BPA 构成的矩阵最小奇异值可比较准确地衡量出证据间的冲突程度,可从两两证据之间冲突角度对证据的可信性做出评价,而证据虚假度可从全局冲突的角度对证据的可信性进行评价,因此两者结合对证据评价更为全面.

通过算例分析表明,所提出的方法能有效处理多种情况下的冲突证据的组合问题,并且具有较快的收敛速度和良好的聚焦效果. 但合成悖论形式多样、原因复杂,所提方法并不能解决所有情形下的合成悖论问题,因此如何与更多的因素结合以扩大方法的适用范围还需要进一步研究.

参考文献：

[1] Dempster A P. Upper and lower probabilities induced by

a multivalued mapping [J]. Annuals of Mathematical Statistics, 1967, 38(2): 325-339.

[2] Shafer G. A mathematical theory of evidence [M]. Princeton: Princeton University Press, 1976: 3-68.

[3] Liu Zhunga, Pan Quan, Dezert J. A new belief-based K-nearest neighbor classification method [J]. Pattern Recognition, 2013, 46(3): 834-844.

[4] 李鹏, 刘思峰. 基于灰色关联分析和 D-S 证据理论的区间直觉模糊决策方法[J]. 自动化学报, 2011, 37(8): 993-998.

Li Peng, Liu Sifeng. Interval-valued intuitionistic fuzzy numbers decision-making method based on grey incidence analysis and D-S theory of evidence [J]. Acta Automatica Sinica, 2011, 37(8): 993-998.

[5] 徐晓滨, 王玉成, 文成林. 评估诊断证据可靠性的信息融合故障诊断方法[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 504-510.

Xu Xiaobin, Wang Yulin, Wen Chenglin. Information-fusion method for fault diagnosis based on reliability evaluation of evidence [J]. Control Theory & Applications,

- 2011, 28(4): 504-510.
- [6] 文成林, 周哲, 徐晓滨. 一种新的广义梯形模糊数相似性度量方法及在故障诊断中的应用[J]. 电子学报, 2011, 39(3A): 1-6.
- Wen Chenglin, Zhou Zhe, Xu Xiaobin. A new similarity measure between generalized trapezoidal fuzzy numbers and its application to fault diagnosis [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(3A): 1-6.
- [7] 耿涛, 卢广山, 张安. 基于直觉模糊证据合成的多传感器目标识别[J]. 控制与决策, 2012, 27(11): 1725-1728, 1734.
- Geng Tao, Lu Guangshan, Zhang An. Intuitionistic fuzzy evidence combination algorithm for multi-sensor target recognition [J]. Control and Decision, 2012, 27(11): 1725-1728, 1734.
- [8] 邓鹏华, 毕义明, 刘卫东, 等. 改进的证据理论在目标识别中的应用[J]. 系统工程与电子技术, 2008, 30(7): 1295-1297.
- Deng Penghua, Bi Yiming, Liu Weidong, et al. Applications of a modified evidence theory in target recognition [J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(7): 1295-1297.
- [9] Yager R R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules [J]. Information Science, 1987, 41(2): 93-137.
- [10] Smets P. The combination of evidence in the transferable belief model [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1990, 12(5): 447-458.
- [11] 孙全, 叶秀清, 顾伟康. 一种新的基于证据理论的合成公式[J]. 电子学报, 2000, 28(8): 117-119.
- Sun Quan, Ye Xiuqing, Gu Weikang. A new combination rules of evidence theory [J]. Acta Electronica Sinica, 2000, 28(8): 117-119.
- [12] Lefevre E, Colot O, Vannoorenberghe P. Belief function combination and conflict management [J]. Information Fusion, 2002, 3(2): 149-162.
- [13] Haenni R. Are alternatives to Dempster's rule of combination real alternative? comments on about the belief function combination and the conflict management problem [J]. Information Fusion, 2002, 3(3): 237-239.
- [14] Murphy C K. Combining belief functions when evidence conflicts [J]. Decision Support Systems, 2000, 29(1): 1-9.
- [15] Deng Yong, Shi Wengkang, Zhu Zhenfu, et al. Combining belief functions based on distance of evidence [J]. Decision Support Systems, 2004, 38(3): 489-493.
- [16] 胡昌华, 司小胜, 周志杰, 等. 新的证据冲突衡量标准下的 D-S 改进算法[J]. 电子学报, 2009, 37(7): 1578-1583.
- Hu Changhua, Si Xiaosheng, Zhou Zhijie, et al. An improved D-S algorithm under the new measure criteria of evidence conflict [J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(7): 1578-1583.
- [17] 刘希亮, 陈桂明. 一种自适应冲突证据检验与合成方法[J]. 控制与决策, 2014, 29(5): 929-932.
- Liu Xilang, Chen Guiming. A self-adaptive conflicting evidence test and combination approach [J]. Control and Decision, 2014, 29(5): 929-932.
- [18] 张鑫, 牟龙华. 基于局部冲突消除的证据合成法则[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(7): 1594-1599.
- Zhang Xin, Mu Longhua. Evidence combination rule based on local conflict elimination [J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(7): 1594-1599.
- [19] 李昌玺, 周焰, 王盛超, 等. 多源信息融合中一种新的证据合成算法[J]. 上海交通大学学报, 2016, 50(7): 1125-1131.
- Li Changxi, Zhou Yan, Wang Shengchao, et al. A novel combination rule of evidence theory in multi-source information fusion [J]. Journal of Shanghai Jiao Tong University, 2016, 50(7): 1125-1131.
- [20] Smets P. Decision making in the TBM: the necessity of the pignistic transformation [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2005, 38(2): 133-147.
- [21] Jousselme A L, Grenier D, Bosse E. A new distance between two bodies of evidence [J]. Information Fusion, 2001, 2(2): 91-101.
- [22] Liu Weiru. Analyzing the degree of conflict among belief functions [J]. Artificial Intelligence, 2006, 170(11): 909-924.
- [23] 蒋雯, 彭进业, 邓勇. 一种新的证据冲突表示方法[J]. 系统工程与电子技术, 2010, 32(3): 562-564.
- Jiang Wen, Peng Jinye, Deng Yong. New representation method of evidential conflict [J]. Systems Engineering and Electronics, 2010, 32(3): 562-564.
- [24] 柯小路, 马荔瑶, 王永. 奇异值衡量证据冲突的新方法[J]. 电子学报, 2013, 41(10): 2109-2112.
- Ke Xiaolu, Ma Liyao, Wang Yong. A new method to measure evidence conflict based on singular value [J]. Acta Electronica Sinica, 2013, 41(10): 2109-2112.
- [25] Schubert J. Conflict management in Dempster-Shafer theory using the degree of falsity [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2011, 52(3): 449-460.