

文章编号:1007-5321(2017)05-0110-07

DOI:10.13190/j.jbupt.2016-155

# 多用户 Z 高斯干扰信道可达速率

童艳春<sup>1</sup>, 张 博<sup>1,2</sup>, 袁芳文<sup>2</sup>

(1. 周口师范学院, 河南 周口 466001; 2. 河南机电职业学院, 郑州 451191)

**摘要:** 为了进一步研究 Han-Kobayashi (HK) 传输策略在多用户 Z 高斯干扰信道上的性能, 在中等弱干扰条件下构造了多用户 Z 高斯干扰信道可达速率内、外界. 通过将信息分割为公有信息和私有信息, 优化每个用户的公有信息和私有信息之间的比例, 得出一条多用户 Z 高斯干扰信道速率  $R_{\text{HK}}$ ; 通过增加级联 Z 高斯干扰信道的约束条件得出了小于  $R_{\text{HK}}$  的速率内界; 利用精灵辅助方案, 得出了大于  $R_{\text{HK}}$  的两条速率外界. 通过计算速率内、外界之差得出: 在中等干扰下, 利用 HK 策略所得到的速率距离信道容量小于  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ; 在弱干扰下, 随着总用户数量的增加, 利用 HK 策略所得到的速率  $R_{\text{HK}}$  与信道容量之间距离逐渐逼近  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

**关键词:** 传输策略; 速率分裂; 高斯干扰信道; 信道容量; 精灵辅助

中图分类号: TN911.22

文献标志码: A

## Achievable Rate of Multi-user Gaussian Z Interference Channel

TONG Yan-chun<sup>1</sup>, ZHANG Bo<sup>1,2</sup>, YUAN Wen-fang<sup>2</sup>

(1. Zhoukou Normal University, Henan Zhoukou 466001, China;

2. Henan Mechanical and Electrical Vocational College, Zhengzhou 451191, China)

**Abstract:** In order to further study the communication scheme of Han-Kobayashi (HK) on cascade Gaussian Z interference channel, a method of one inner bound and two outer bounds was proposed under weak and medium interference. In the scheme, as the transmitted information of both users split into common information and private information, a achieve rate  $R_{\text{HK}}$  is obtained by optimizing the ratio between common and private information. An inner bound is proposed by adding a constraint on this channel which is less than  $R_{\text{HK}}$ . Based on two genie-aided programs of two-user interference channel, two outer bounds were proposed by genie-aided which great than  $R_{\text{HK}}$ . By analyzing the distance between the inner bound and outer bounds, HK type scheme can be achieved within a single bit per second per hertz ( $\text{bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ) of the capacity under medium interference and approach to a single bit per second per hertz ( $\text{bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ) of the capacity under weak interference as total number increasing.

**Key words:** communication scheme; rate-splitting; Gaussian interference channel; channel capacity; genie-aided

追求更高传输速率和更高频谱效率是无线通信领域一个永恒的话题, 其根本问题是如何提高网络

信息容量. 从原理上来说, 提高网络信息容量, 一方面需要增加网络的覆盖、提高信息的传输速率, 另一

收稿日期: 2016-09-16

基金项目: 国家自然科学基金项目(U1504601, 61300035); 周口师范学院教育教学改革研究资助项目(J2016015); 河南省科技攻关资助项目(162102310604, 172102310123)

作者简介: 童艳春(1981—), 女, 讲师; 张 博(1982—), 男, 博士生, E-mail: zhangbo@zkn. edu. cn.

方面用户密度的增加要求能有效解决小区间的干扰问题. 近年来,多输入多输出(MIMO, multiple-input multiple-output)技术、空时编码技术、机会调度、现代信道编码(Turbo码、低密度奇偶校验码和 Rateless码)等技术的出现,使得信道衰落和信道加性噪声对通信系统造成的影响越来越小. 同时,中继协作技术的出现解决了信号的传播距离问题,在提高了网络覆盖性能的同时加剧了小区内、小区间和网络间的干扰. 因此,干扰日益成为制约提升通信系统性能的瓶颈,如何消除干扰带来的影响成为无线通信网络的研究重点,同时用来描述用户之间干扰的干扰信道模型也成为了一类研究的热点模型<sup>[1]</sup>.

然而,从干扰信道模型的提出<sup>[2]</sup>以来,中等弱干扰条件下的干扰信道容量限至今仍未确定. 目前,该条件下的最佳速率区域是1981年由Han和Kobayashi提出的,其传输方案称为Han-Kobayashi(HK)传输策略<sup>[3]</sup>. 其思想是利用速率分裂技术将每个发射端的发送信息分成2部分:能够被每个接收端译出的公有信息和只能被相应接收端译出的私有信息. 通过计算最优公有信息与私有信息比例获取最大可达速率. 2004年,Sanson<sup>[4]</sup>提出了一种退化的2用户干扰信道——2用户Z干扰信道,经过几年的研究,该信道的容量研究成果较为丰富,在所有干扰条件下其和速率容量限已确定. 假定接收端已知延迟信道状态信息,Mohanty等<sup>[5]</sup>给出了该信道的自由度区域;Patel等<sup>[6]</sup>给出了多址认知Z干扰信道的可达速率区域;假定接收端已知混合状态信道信息,Mohanty等<sup>[7]</sup>给出了该条件下的Z干扰信道自由度区域;Shang<sup>[8]</sup>给出了MIMO Z干扰信道的部分容量界和和速率容量限;Costa<sup>[9]</sup>利用功率注水法在中等干扰强度下给出了2用户Z干扰信道速率可达区域;利用HK传输策略可得到2用户Z高斯干扰信道可达速率区域,Costa等<sup>[10]</sup>确定了该可达速率区域拐点处的斜率. 然而,以上2用户Z干扰信道成果在3用户以上信道应用具有很大局限性.

近年来,由于多用户级联Z高斯干扰信道(CGZIC, cascade Gaussian Z interference channel)能够模拟高速路通信环境,开始引起了许多学者的关注,但至今为止该信道的容量研究成果仅限于3用户或特殊条件下的多用户CGZIC. Liu等<sup>[11]</sup>仅证明了3用户CGZIC下,利用HK传输策略得到的可达和速率距离和速率容量限最多 $0.5 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ . Mohanty等<sup>[12]</sup>基于干扰对齐方法,得出了3用户MIMO循环

CGZIC的自由度区域.

笔者针对多用户CGZIC信道容量问题进行研究,主要利用Etkin,Tse和Wang<sup>[13]</sup>提出的内外界构建方法,简称ETW方法,通过增加约束条件和引入精灵辅助技术,构造出 $N(N>2)$ 用户CGZIC的传输速率内界和外界. 同时,将2用户干扰信道最佳传输方案的HK传输方案推广至 $N(N>2)$ 用户CGZIC. 通过计算内外界之差,分析其可达速率与该信道容量限之间的距离.

## 1 信道模型

Wyner小区通信网络呈线性排列分布,每个基站只服务一个用户,除了最后一个用户,其余用户只受相邻一个小区的干扰. 因此,CGZIC模型可用于描述该通信网络的下行信道,其信道模型如图1所示. 现实环境中,CGZIC模型可用来模拟高速公路、铁路、坑道及涵洞内部等通信环境,信道模型的表达式为

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 + h_{2,1}x_2 + z_1 \\ y_2 &= x_2 + h_{3,2}x_3 + z_2 \\ &\vdots \\ y_N &= x_N + z_N \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

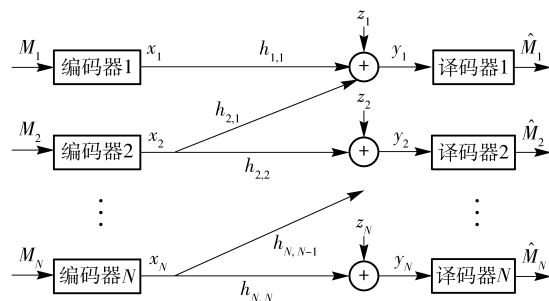


图1 改进型 Wyner 信道模型

其中: $x_n$ 为用户 $n$ 的发送信息; $y_n$ 为用户 $n$ 的接收信息,且发射功率满足 $E[|x_n|^2] \leq P_n$ ;  $h_{n,i}$ 为用户 $n$ 的发射端到用户 $i$ 的接收端的信道系数; $z_n$ 为高斯白噪声, $z_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ ,  $n \in \{1,2,\dots,N\}$ . 设码长为 $m$ ,用户 $n$ 从码本 $\mathcal{C}_{n,m}$  ( $|\mathcal{C}_{n,m}| = 2^{mR_n}$ ) 中选择一个码字来传递信息  $M_n \in \{1,2,\dots,2^{mR_n}\}$ . 码本中码字

$\{c_n(m_n)\}$ 的平均功率满足 $\frac{1}{m} \sum_{t=1}^m |c_n(m_n)[t]|^2 \leq P_n$ . 接收端收到信号 $\{y_n[t]: t=1,2,\dots,m\}$ ,并通过译码函数估计出发送信息 $\hat{M}_n$ ,当 $\hat{M}_n \neq M_n$ 时,出现错误,则平均错误概率为 $\varepsilon_m = \Pr(\hat{M}_1 \neq M_1 \cup \hat{M}_2 \neq$

$M_2 \cup \dots \cup \hat{M}_N \neq M_N$ ). 当每个用户的功率分别受限于  $P_n$  时, 发送速率组为  $(R_1, R_2, \dots, R_N)$ , 接收端通过译码函数进行译码, 如果码长  $m \rightarrow \infty$ , 平均错误概率  $\varepsilon_m$  趋于 0, 则称速率组  $(R_1, R_2, \dots, R_N)$  是可达的, 由所有可达速率组成的区域  $\mathcal{R}$  称为容量限区域. 这里讨论对称  $N$  用户 CGZIC, 即  $|h_{n,k}| = h (n \neq k)$ ,  $|h_{n,k}| = 1 (n = k)$  及  $P_n = P (n, k \in \{1, 2, \dots, N\})$ , 为了使速率分裂技术能够有效地提高系统速率, 设干扰系数满足  $\frac{\sqrt{1+4P}-1}{2P} \leq h^2 \leq 1$ , 即只考虑中等弱干扰条件<sup>[14]</sup>.

根据 HK 方法, 在发射端将每个用户发送的信息分为私有信息  $W_n$  和公有信息  $U_n (n \in \{1, 2, \dots, N\})$  2 部分. 在接收端采用同时译码方法, 通过调节每个用户私有信息与公有信息之间的比例, 得到可达速率  $R_{\text{HK}}$ . 为了分析  $R_{\text{HK}}$  与  $N$  用户 CGZIC 的信道容量限之间的距离, 构造  $N$  用户 CGZIC 的速率内、外界, 通过分析内、外界之差, 判断出  $R_{\text{HK}}$  与容量限之间的距离.

## 2 $N$ 用户 CGZIC 可达速率内界

通过增加信道的约束条件, 利用简化 HK 方法构造  $N$  用户 CGZIC 的可达速率. 由于信道增加了约束条件, 利用简化 HK 方法构造的可达速率, 必定是  $N$  用户 CGZIC 的速率内界  $R_{\text{IB}}$ , 且满足  $R_{\text{IB}} \leq R_{\text{HK}}$ . 如图 2 所示, 假定第 1 个用户与第  $N$  个用户之间产生约束, 即第  $N$  个用户的接收端受到来自第 1 个用户发射端的干扰, 从而  $N$  用户 CGZIC 模型衍变成循环高斯干扰信道模型. 同样考虑对称信道, 根据文献<sup>[15]</sup>引理 1 和文献<sup>[16]</sup>, 定义  $\gamma(x) = \ln(1+x)$ , 可得到循环高斯干扰信道的可达和速率为

$$R(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N) = \sum_{n=1}^N \gamma\left(\frac{\lambda_n P}{1 + h^2 \lambda_{n+1} P}\right) + \min \left\{ \sum_{n=1}^N \gamma\left(\frac{\bar{\lambda}_n P}{1 + \lambda_n P + h^2 \lambda_{n+1} P}\right), \sum_{n=1}^N \gamma\left(\frac{h^2 \bar{\lambda}_n P}{1 + \lambda_{n-1} P + h^2 \lambda_n P}\right), \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \gamma\left(\frac{h^2 \bar{\lambda}_n P + \bar{\lambda}_{n-1} P}{1 + \lambda_{n-1} P + h^2 \lambda_n P}\right) \right\} \quad (2)$$

其中:  $\lambda_n$  为用户的分裂系数,  $\bar{\lambda}_n = 1 - \lambda_n$ .

采用 ETW 方法, 增加一些特殊约束, 通过简单 HK 方案得出  $N$  用户 CGZIC 的速率内界. 假定每个用户私有与公有信息的分配比例相同且为  $\lambda$ , 并满

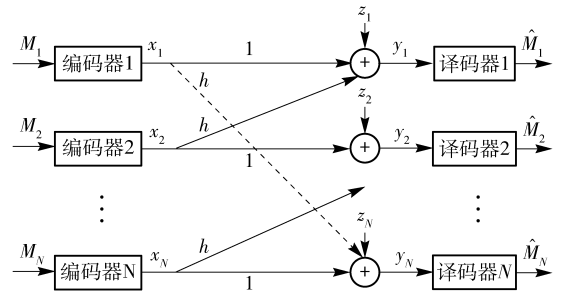


图 2 增加约束条件的  $N$  用户 CGZIC

足  $hP \geq 1$ . 可达和速率<sup>[13]</sup>为

$$R_{\text{sum-IB}} = N \min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \gamma(h^2 P + P) + \frac{1}{2} \gamma\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) - 1}_{\beta_1}, \underbrace{\gamma\left(h^2 P + \frac{1}{h^2}\right) - 1}_{\beta_2} \right\} \quad (3)$$

则对称速率内界为

$$R_{\text{sum-IB}} = \min \left\{ \underbrace{\frac{1}{2} \gamma(h^2 P + P) + \frac{1}{2} \gamma\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) - 1}_{\beta_1}, \underbrace{\gamma\left(h^2 P + \frac{1}{h^2}\right) - 1}_{\beta_2} \right\} \quad (4)$$

定义  $\beta_1 = \{(P, h^2 P) : h^2 P \geq 1 \cup P(P + h^2 P) < h^4 P^2 (h^2 P + 1)\}$

$\beta_2 = \{(P, h^2 P) : h^2 P \geq 1 \cup P(P + h^2 P) \geq h^4 P^2 (h^2 P + 1)\}$

其中:  $\beta_1$  为中等干扰区域,  $\beta_2$  为弱干扰区域. 为了能够随着干扰强度变化, 形象地描述速率内界与点对点加性高斯白噪声 (AWGN, additive white Gaussian noise) 信道容量之间的关系, 将式 (4) 除以点对点 AWGN 信道容量  $C_{\text{AWGN}}$ , 即

$$\frac{R_{\text{IB}}}{C_{\text{AWGN}}} = \min \left\{ \frac{\frac{1}{2} \gamma(h^2 P + P) + \frac{1}{2} \gamma\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) - 1}{\gamma(P)}, \frac{\gamma\left(h^2 P + \frac{1}{h^2}\right) - 1}{\gamma(P)} \right\} \approx \min \left\{ 1 - \frac{1}{2} \frac{\gamma(h^2 P - 1)}{\gamma(P - 1)}, \max \left\{ \frac{\gamma(h^2 P - 1)}{\gamma(P - 1)}, 1 - \frac{\gamma(h^2 P - 1)}{\gamma(P - 1)} \right\} \right\} \quad (5)$$

考虑在高信噪比条件下 ( $h^2 P \gg 1, P \gg 1$ ), 且满足  $1 \gg h^2$ , 定义  $\alpha = \frac{\gamma(h^2 P - 1)}{\gamma(P - 1)}$ , 将  $\alpha$  代入式 (5) 得到

$$\frac{R_{\text{IB}}}{C_{\text{AWGN}}} \approx \min \left\{ 1 - \frac{\alpha}{2}, \max \left\{ \alpha, 1 - \alpha \right\} \right\}$$

图 3 所示为在  $\beta_1$  和  $\beta_2$  范围内, 函数  $\alpha$  根据不

同干扰强度的取值.

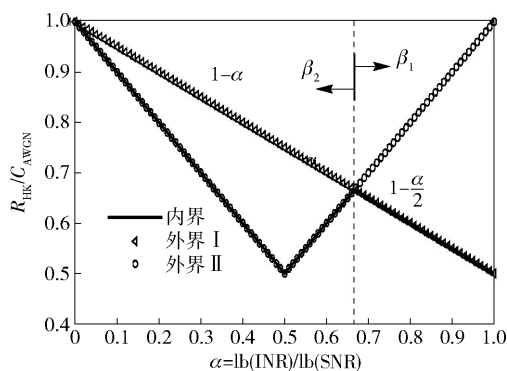


图 3  $N$  用户 CGZIC 速率内界、外界 I、II 与  $C_{AWGN}$  的比值

### 3 $N$ 用户 CGZIC 可达速率外界

根据总用户数量的奇偶性,在  $\beta_1$  和  $\beta_2$  范围内,采用 2 种精灵辅助模式,相应地提出  $N$  用户 CGZIC 的 2 条速率外界.

#### 3.1 外界 I

在  $\beta_1$  范围内,提出一种较为紧致的速率外界.

##### 3.1.1 $N$ (奇数) 用户 CGZIC 的速率外界

**定理 1** 总用户量为  $N$  ( $N$  为奇数变量,  $N > 1$ ) 的 CGZIC 如图 4 所示,该信道的对称速率外界为

$$R_{UB1}^o = \frac{1}{N}\gamma(\sqrt{P}) + \frac{N-1}{2N} \left( \gamma\left(\frac{P}{1+h^2P}\right) + \gamma(P) \right) \quad (6)$$

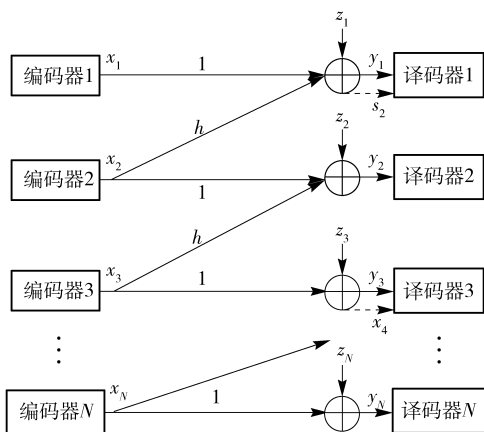


图 4 具有精灵辅助的  $N$  用户 CGZIC

**证明** 在发射端中,将第 2 个用户的信息  $x_2$  分割为  $x_{21}$  和  $x_{22}$  相互独立的 2 部分;在接收端中,  $(N-1)/2$  个用户得到精灵给予的边信息. 精灵辅助的具体方法如下:

##### 1) 精灵部分辅助策略

第 1 个用户得到的边信息为  $s_1$ ,  $s_1 = x_{21}$ . 设  $x_n^m$

为用户  $n$  发送的码长为  $m$  的信息序列,  $y_n^m$  为用户  $n$  接收的码长为  $m$  的信息序列,  $s_n^m$  为用户  $n$  码长为  $m$  的边信息序列,  $z_n^m$  为用户  $n$  在接收码长为  $m$  序列时的噪声.  $x_1$  和  $s_1$  相互独立,有

$$I(x_1^m; y_1^m, s_1^m) = I(x_1^m; s_1^m) + I(x_1^m; y_1^m | s_1^m) = I(x_1^m; x_1^m + hx_{22}^m + z_1^m) \quad (7)$$

由此可见,得到精灵辅助的用户 1 只受到用户 2 私有信息的干扰.

如果  $x_{21}$  的功率满足  $E[|x_{21}|^2] \geq P - \frac{\sqrt{1+4P}-1}{2}$ , 则接收端 1 受到的干扰只来自用户 2

的信息  $hx_{22}$ , 干扰功率为  $E[|hx_{22}|^2] \leq \frac{\sqrt{1+4P}-1}{2}$ .

接收端 1 将该干扰作为噪声处理的方法能够达到其容量限. 设  $E[|hx_{22}|^2] = \sqrt{P}-1 < \frac{\sqrt{1+4P}-1}{2}$ , 用户 1 的最大传输速率为

$$R_1 = \gamma\left(\frac{P}{1+\sqrt{P}-1}\right) = \gamma(\sqrt{P}) \quad (8)$$

因此,用户 1 的链路可看作是噪声服从  $Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sqrt{P})$  的点对点信道. 同时,用户 2 传输速率不再受限于与用户 1 相连接的链路.

##### 2) 精灵完全辅助策略

奇数用户  $U_n$  得到的边信息为  $x_{n+1}$ ,  $n = 1 + 2i$ ,  $0 < i < \frac{N-1}{2}$ .

利用边信息消除其他用户带来的干扰,使得用户  $\{U_n, n = 1 + 2i, 0 < i < \frac{N-1}{2}\}$  的接收端不受干扰.

因此,剩下的  $N-1$  个用户可以划分为  $(N-1)/2$  个相互独立的 2 用户 Z 干扰信道.

从而,当总用户数量为奇数时,利用该精灵辅助方案,CGZIC 可看作是由一个点对点信道和  $(N-1)/2$  个 2 用户 Z 干扰信道构成的,如图 5 所示. 根据文献[4],当  $h < 1$  时,这个信道的和速率容量为

$$R_{\text{sum-capacity}}^o = \gamma(\sqrt{P}) + \frac{N-1}{2} \left( \gamma\left(\frac{P}{1+h^2P}\right) + \gamma(P) \right) \quad (9)$$

则得到一个  $N$  用户 CGZIC 速率外界为

$$R_{UB1}^o = \frac{1}{N}\gamma(\sqrt{P}) + \frac{N-1}{2N} \left( \gamma\left(\frac{P}{1+h^2P}\right) + \gamma(P) \right) \quad (10)$$

在高信噪比下,即  $P \gg 1$ ,  $h^2P \gg 1$ , 且满足  $1 \gg h^2$ ,

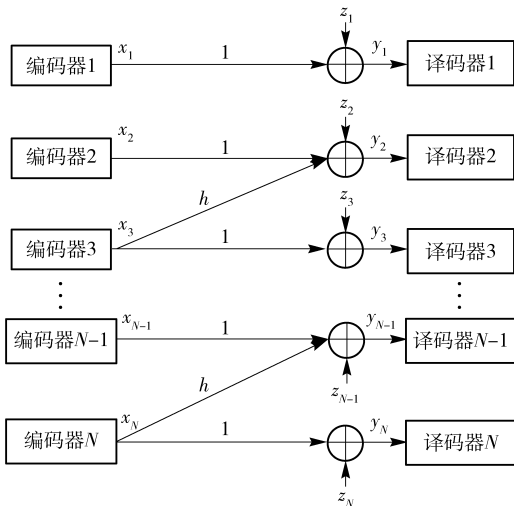


图 5 复合信道模型

当总用户数量趋于无穷时,得出

$$\frac{R_{UB1}^o}{C_{AWGN}} \approx 1 - \frac{1}{a} \quad (11)$$

证毕.

### 3.1.2 $N$ (偶数) 用户 CGZIC 的速率外界

**定理 2** 总用户量为  $N(N > 2)$  的 CGZIC 如图 5 所示,当  $N$  为偶数时,该信道的对称速率外界为

$$R_{UB1}^e = \frac{1}{2} \left( \gamma \left( \frac{P}{1+h^2P} \right) + \gamma(P) \right) \quad (12)$$

**证明** 与总用户数量为奇数的信道相类似,总用户数量  $N$  为偶数的 CGZIC 中,用户  $\{U_n, n = 2i, 0 < i < \frac{N}{2}\}$  接收端收到来自精灵的边信息  $x_{n+1}$ . 因此,总用户数量为偶数的 CGZIC 可划分为  $N/2$  个相互独立的 2 用户 Z 干扰信道. 该信道的和速率容量与总用户量为偶数的 CGZIC 的对称速率外界分别为

$$R_{\text{sum-capacity}}^e = \frac{N}{2} \left( \gamma \left( \frac{P}{1+h^2P} \right) + \gamma(P) \right) \quad (13)$$

$$R_{UB1}^e = \frac{1}{2} \left( \gamma \left( \frac{P}{1+h^2P} \right) + \gamma(P) \right) \quad (14)$$

证毕.

高信噪比条件下,即  $P \gg 1, h^2P \gg 1$ , 且满足  $1 \gg h^2$ , 有

$$\frac{R_{UB1}^e}{C_{AWGN}} \approx 1 - \frac{1}{\alpha} \quad (15)$$

针对总用户数量的奇偶性,在  $\beta_1$  范围内得到了相应的速率内外界. 通过计算速率内外界之差,从而判断利用 HK 方案得到的  $N$  用户 CGZIC 的速率

内界与容量限之间的距离.

用户总数为奇数的用户速率内外界比较如下:

$$\begin{aligned} R_{UB1}^o - R_{IB} &= \\ \frac{1}{N} \gamma(\sqrt{P}) + \frac{N-1}{2N} \left[ \gamma \left( \frac{P}{1+h^2P} \right) + \gamma(P) \right] - \\ \frac{1}{2} \gamma(P+h^2P) - \frac{1}{2} \gamma \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) + 1 &< \\ \frac{1}{N} \gamma(\sqrt{P}) - \frac{1}{2N} \gamma(P+h^2P) - \frac{1}{2N} \gamma \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) + 1 &< 1 \end{aligned} \quad (16)$$

其中第 1 个不等式是根据文献[3]得出的.

用户总数为偶数的用户速率内外界比较如下:

$$\begin{aligned} R_{UB1}^e - R_{IB} &= \frac{1}{2} \left[ \gamma \left( \frac{P}{1+h^2P} \right) + \gamma(P) \right] - \\ \frac{1}{2} \gamma(P+h^2P) - \frac{1}{2} \gamma \left( 1 + \frac{1}{h^2} \right) + 1 &< 1 \end{aligned} \quad (17)$$

根据文献[13],式(17)中的不等式成立. 因为  $R_{IB} < R_{HK}$ , 且  $R_{HK} < R_{UB1}$ , 所以利用 HK 方案得到的  $N$  用户 CGZIC 的速率区域  $R_{HK}$  距离容量限在  $\beta_1$  范围内小于  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1} \text{ bit}$ .

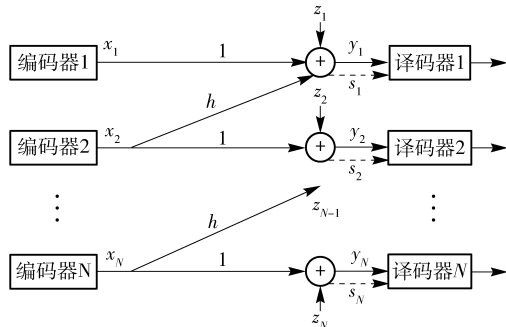
如图 3 所示,内界 I 在  $\beta_1$  范围内较为紧致,但在  $\beta_2$  范围内很松弛. 下面将构造在  $\beta_2$  范围内较紧致的速率外界.

### 3.2 外界 II

采用另一种精灵辅助方案,在  $\beta_2$  范围内,提出一种较为紧致的速率外界. 为避免给予用户过多的边信息,给各个接收端提供的信息不足以让它们完全消除受到的干扰,如图 6 所示,辅助信息分别为

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= hx_1 + z_N \\ s_2 &= hx_2 + z_1 \\ &\vdots \\ s_N &= hx_N + z_{N-1} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

参考 ETW 方案,给出  $N$  用户 CGZIC 的另一条速率外界  $R_{UB2}$ .

图 6 具有精灵辅助的  $N$  用户 CGZIC 模型



**定理 3** 利用以上提出的精灵辅助方案,  $N$  用户 CGZIC 的和速率外界为

$$R_{\text{sum-UB2}} = (N-1)\gamma \left( h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) + \gamma(P+h^2 P) \quad (19)$$

**证明**

$$\begin{aligned} m \sum_{n=1}^N R_n &\leq \sum_{n=1}^N I(\mathbf{x}_n^m; \mathbf{y}_n^m, \mathbf{s}_n^m) + m\mathcal{E}_m \leq \\ &\sum_{i=1}^m h(s_{1i}) - h(z_{N1}) + h(y_{N1}|s_{N1}) - h(z_{N1}) + \\ &\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m [h(y_{ni}|s_{ni}) - h(z_{ni})] + m\mathcal{E}_m \quad (20) \end{aligned}$$

其中  $h(\cdot)$  表示熵. 由于收到额外的边信息, 基于精灵辅助的  $N$  用户 CGZIC 信道容量构成  $N$  用户 CGZIC 容量的外界. 因此, 可以通过计算基于精灵辅助  $N$  用户 CGZIC 的信道容量来获得  $N$  用户 CGZIC 的另一条速率外界. 对于一条长度为  $m$  的信息序列, 基于精灵辅助的  $N$  用户 CGZIC 的和速率满足式 (20). 定义  $E[|x_{ni}^2|] = P_{ni}, n \in \{1, 2, \dots, N\}, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(y_{1i}|s_{1i}) &\stackrel{(a)}{\leq} \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P_{2i} + \frac{P_{1i}}{1+h^2 P_{1i}} \right) \right] &\stackrel{(b)}{\leq} \\ \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + \frac{h^2 \sum_{i=1}^m \text{lb} P_{2i}}{m} + \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{lb} P_{1i}}{1 + \frac{h^2 \sum_{i=1}^m \text{lb} P_{1i}}{m}} \right) \right] &\stackrel{(c)}{\leq} \\ \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P_2 + \frac{P_1}{1+h^2 P_1} \right) \right] &\stackrel{(d)}{=} \\ \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) \right] &\quad (21) \end{aligned}$$

定义  $E[|x_{ni}^2|] = P_{ni}, n \in \{1, 2, \dots, N\}, i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(y_{1i}|s_{1i}) &\leq \\ \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P_{2i} + \frac{P_{1i}}{1+h^2 P_{1i}} \right) \right] &\leq \quad (22) \\ \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + \frac{h^2 \sum_{i=1}^m \text{lb} P_{2i}}{m} + \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \text{lb} P_{1i}}{1 + \frac{h^2 \sum_{i=1}^m \text{lb} P_{1i}}{m}} \right) \right] &\leq \quad (23) \end{aligned}$$

$$\text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P_2 + \frac{P_1}{1+h^2 P_1} \right) \right] = \quad (24)$$

$$\text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) \right] \quad (25)$$

根据文献[13]定理1的证明方法, 不等式(22)的推导采用了当信号服从循环对称复高斯分布时条件熵取最大值的原理; 不等式(23)的推导采用了 Jensen 不等式原理; 不等式(24)成立是因为该函数是随着功率  $P_n$  的增加而递增的; 由于考虑对称信道, 所以等式(25)成立. 同理, 当  $1 < n \leq N-1$  时, 有

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m h(y_{ni}|s_{ni}) \leq \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) \right] \quad (26)$$

与前面  $N-1$  个用户不同,  $(1/m) \sum_{i=1}^m h(y_{Ni}|s_{Ni}) \leq \text{lb} \left[ \pi e \left( 1 + \frac{P}{1+h^2 P} \right) \right]$ . 因此, 有

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N R_n &\leq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [h(s_{1i}) - h(z_{N1}) + h(y_{N1}|s_{N1}) - \\ &h(z_{N1})] + \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{i=1}^m [h(y_{ni}|s_{ni}) - h(z_{ni})] + \mathcal{E}_m \leq \\ &(N-1)\gamma \left( h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) + \gamma(h^2 P) + \\ &\gamma \left( \frac{P}{1+h^2 P} \right) + \mathcal{E}_m = (N-1)\gamma \left( h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) + \\ &\gamma(h^2 P + P) + \mathcal{E}_m \quad (27) \end{aligned}$$

随着  $m \rightarrow \infty, \mathcal{E}_m \rightarrow 0$ . 证毕.

至此, 可以得到另外一条  $N$  用户 CGZIC 的对称速率外界为

$$R_{\text{UB2}} = \frac{N-1}{N} \gamma \left( h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) + \frac{1}{N} \gamma(P+h^2 P) \quad (28)$$

在  $\beta_2$  范围内, 将外界 II 与内界进行比较:

$$\begin{aligned} R_{\text{UB2}} - R_{\text{IB}} &= \frac{N-1}{N} \gamma \left( h^2 P + \frac{P}{1+h^2 P} \right) + \\ &\frac{1}{N} \gamma(P+h^2 P) - \gamma \left( h^2 P + \frac{1}{h^2} \right) + 1 < \\ &\frac{1}{N} \gamma \left( \frac{(1+h^2 P + P)h^2 P}{(1+h^2 P)^2 + P} - 1 \right) + 1 \quad (29) \end{aligned}$$

虽没能得到与  $\beta_1$  范围内同样的结论, 但当总用户数量  $N$  递增时, 对称速率外界 II 与容量限的距离逐渐趋近于  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ . 由于  $R_{\text{IB}} < R_{\text{HK}}$ , 且  $R_{\text{HK}} < R_{\text{UB2}}$ , 所以在  $\beta_1$  范围内利用 HK 方案得到  $N$  用户 CGZIC 的速率区域  $R_{\text{HK}}$ , 当总用户数量趋于无穷时, 距离容量限约  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ . 在高信噪比条件 ( $P \gg 1$ ),

$h^2 P \gg 1$ ) 下,且总用户数量趋于无穷时,得到

$$\frac{R_{UB2}}{C_{AWGN}} \approx \max \left\{ \frac{\gamma(h^2 P - 1)}{\gamma(P - 1)}, 1 - \frac{\gamma(h^2 P - 1)}{\gamma(P - 1)} \right\} = \max \{ \alpha, 1 - \alpha \} \quad (30)$$

## 4 结束语

针对 CGZIC, 计算出了利用速率分裂技术得到的最大速率与该信道容量限之间的距离. 通过增加 CGZIC 的约束条件得出该信道的速率内界, 并参考 ETW 方法, 采用 2 种精灵辅助方案, 得出 2 条速率外界. 最后, 通过推导速率内外界之差得出: 在 CGZIC 中, 中等干扰条件下, 利用 HK 策略所得到的速率  $R_{HK}$  距离信道容量小于  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ; 在弱干扰条件下, 随着总用户数量的增加, 利用 HK 策略所得到的速率  $R_{HK}$  距离信道容量逐渐逼近  $1 \text{ bit} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

## 参考文献:

- [1] Avestimehr A S, El Gamal H, Jafar S A, et al. Introduction to the special issue on interference networks [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2011, 57(5): 2545-2547.
- [2] Shannon C E. Two-way communication channels [C] // Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. Berkeley: IEEE Press, 1961: 611-644.
- [3] Han T, Kobayashi K. A new achievable rate region for the interference channel [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1981, 27(1): 49-60.
- [4] Sanson I. On achievable rate regions for the Gaussian interference channels [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2004, 50(6): 1345-1356.
- [5] Mohanty K, Varanasi M K. Degrees of freedom of the MIMO Z-interference channel with delayed CSIT [J]. IEEE Communications Letters, 2015, 19(12): 2282-2285.
- [6] Patel A, Reategui F, Imran M A, et al. On bounds for the cognitive multiple access Z-interference channel [C] // IEEE 14<sup>th</sup> Canadian Workshop on Information Theory (CWIT). St. John's, NL, Canada: IEEE Press, 2015: 46-49.
- [7] Mohanty K, Varanasi M K. Degrees of freedom region of the MIMO Z-interference channel with mixed CSIT [J]. IEEE Communications Letters, 2016, 20(12): 2422-2425.
- [8] Shang Xiaohu. Partial capacity boundary of parallel Gaussian Z interference channels [C] // IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Hong Kong, China: IEEE Press, 2015: 206-210.
- [9] Costa M H M. A third critical point in the achievable region of the Z-Gaussian interference channel [C] // Information Theory and Applications Workshop (ITA). San Diego, CA, USA: IEEE Press, 2014: 1-3.
- [10] Costa M H M, Nair C. Gaussian z-interference channel: around the corner [C] // Information Theory and Applications Workshop (ITA). La Jolla, CA, USA: IEEE Press, 2016: 1-6.
- [11] Liu Yuanpeng Erkip E. On the sum capacity of K-user cascade Gaussian Z-interference channel [C] // IEEE International Symposium on Information Theory Proceedings (ISIT). St. Petersburg, Russia: IEEE Press, 2011: 1382-1386.
- [12] Mohanty K, Varanasi M K. The degrees of freedom region of the 3-user MIMO cyclic Z-interference channel with perfect and delayed CSIT [C] // IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Hong Kong, China: IEEE Press, 2015: 879-883.
- [13] Etkin R H, Tse D N C, Wang Hua. Gaussian interference channel capacity to within one bit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 54(12): 5534-5562.
- [14] Zhang Bo, Li Yong, Mao Lulu, et al. Rate-splitting based bound-approaching transmission scheme for the two-user symmetric Gaussian interference channel with common messages [J]. Radioengineering, 2012, 21(4): 1194-1201.
- [15] 张博, 李勇, 白宝明, 等. 对称循环高斯干扰信道下的速率分裂方案及其可达和速率 [J]. 通信学报, 2013(6): 114-121.  
Zhang Bo, Li Yong, Bai Baoming, et al. Rate-splitting scheme and its achievable sum-rate for the symmetric cyclic Gaussian interference channel [J]. Journal on Communications, 2013(6): 114-121.
- [16] 张博, 李勇, 白宝明, 等. 高斯干扰信道中基于速率分裂的译码次序算法 [J]. 电子与信息学报, 2013, 35(6): 1388-1394.  
Zhang Bo, Li Yong, Bai Baoming, et al. Decoding order algorithm based on rate-splitting in Gaussian interference channels [J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2013, 35(6): 1388-1394.