

一种基于 L_1 范数的目标源测向算法

李枝灵¹, 李 凯¹, 岳晓果², 亓 峰¹, 陈兴渝¹

(1. 北京邮电大学 网络与交换技术国家重点实验室, 北京 100876;

2. 总参信息化部驻航天科技集团军事代表室, 北京 100015)

摘要: 在高维信号处理中,为了有效地估计信号的角度,提出了基于 L_1 范数的二阶锥规划算法(L_1 -SVD). 该算法将稀疏重构用于目标源测向技术,在窄带信号的模型基础上,引进稀疏域模型,将一个高维信号的角度估计问题抽象成欠定方程组求解问题. 经 Matlab 仿真验证,与其他最小范数法以及经典多重信号分类算法相比,该算法在较大的信噪比范围内都能取得较低的重构误差和较高的成功概率,对相关性较大的信号也能进行识别. 这证明了该算法能够有效地实现目标源测向.

关键词: 高维信号处理; L_1 -二阶锥规划算法; 稀疏重构; 信号角度估计

中图分类号: TN911.22

文献标志码: A

A Target Source Direction Estimation Algorithm Based on L_1 Norm

LI Zhi-ling¹, LI Kai¹, YUE Xiao-guo², QI Feng¹, CHEN Xing-yu¹

(1. State Key Laboratory of Networking and Switching Technology, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China;

2. Military Delegate Office in China Aerospace Science and Technology Corporation, IT Department, PLA Headquarters of the General Staff, Beijing 100015, China)

Abstract: To estimate the angle signal in the high-dimensional signal processing efficiently, a second-order cone algorithm based on L_1 norm(L_1 -SVD) is proposed. The algorithm applies sparse reconstruction to the target direction finding technology. Sparse domain model is introduced based on narrowband signal model, in which angle estimation problem of a high-dimensional signal is abstracted into underdetermined equations problems. Simulation results with Matlab show that, compared with other minimum norm methods and classic multiple signal classification algorithm, L_1 -SVD can achieve lower reconstruction error and a higher probability of success in a wide range of signal to noise ratio and identify the signal with larger correlation. So it is proved that the algorithm can achieve the target source direction estimation effectively.

Key words: high-dimensional signal processing; L_1 -SOC; sparse reconstruction; signal angle estimation

随着高维信号处理问题的增多,带来了计算复杂度、信号相关性大、信噪比低等问题. 从最早的常规波束形成(CBF, conventional beamforming)方法到多重信号分类(MUSIC, multiple signal classification),这些算法理论上提高了处理空间信号的角度

估计精度、角度分辨力及其他参数精度^[1]. 然而,对于高维信号处理仍存在分辨力低、计算量大等问题. 与传统方法不同,稀疏表示是根据信号的结构特征,将给定的信号在冗余基上进行分解,在变换域上自适应地选择少量的基来准确地表示原始信号,它能

有效地提取信号的本质特征,有利于对信号的后续处理,可降低信号处理成本。

为了解决上述问题,提出了基于 L_1 范数的目标源测向算法。该算法首先对高维信号进行联合稀疏表示,再将角度估计问题抽象成二阶锥归化问题,最后利用凸优化工具箱 CVX 进行求解。

1 阵列信号处理系统

1.1 阵列信号处理模型

假定信号源为窄带信号,考虑 N 个远场信号入射到空间的某个阵列上。阵列天线由 M 个传感器(阵元)组成。设通道数与阵元数相同,即阵元接收信号后经各自的传输信道传送到处理器,图1所示为空间谱估计的系统模型^[1]。

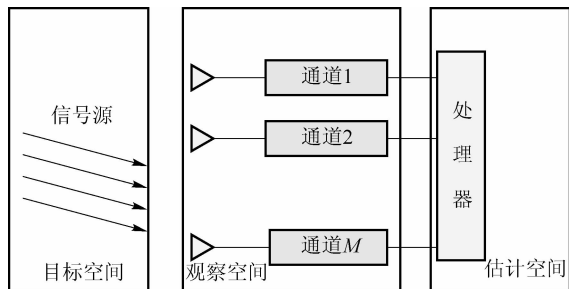


图1 空间谱估计的系统模型

理想的情况下,各阵元各向同性,没有互耦、通道不一致等问题^[1]。因此,信号在阵元上的增益可以忽略(即 g_{ki} 为1),信号可表示为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) \quad (1)$$

其中: $\mathbf{y}(t)$ 表示 $M \times 1$ 维阵列快拍数据矢量, $\mathbf{n}(t)$ 表示 $M \times 1$ 维噪声数据矢量, $\mathbf{x}(t)$ 为空间信号的 $N \times 1$ 维矢量, \mathbf{A} 为空间阵列 $M \times N$ 维流型矩阵,且

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1(\omega_0) \mathbf{a}_2(\omega_0) \cdots \mathbf{a}_N(\omega_0)] \quad (2)$$

信号源之间相干时,表示为^[1]

$$x_i(t) = h_i x_0(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

其中: $x_0(t)$ 为基本信源,由它产生阵列上的 n 个相干信号源; h_i 为参数。相干信号源可表示为^[1]

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{A} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} x_0(t) + \mathbf{n}(t) \quad (4)$$

1.2 稀疏域模型

压缩感知理论是在稀疏信号基础上提出的一种采样与重构的理论^[2]。引入全部可能到达角度的过

完备正交基 $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 来表示 \mathbf{A} , 那么对于简单的无噪声原始信号 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ 可用该基矩阵 Φ 表示:

$$\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x} \quad (5)$$

其中: $\Phi = [\mathbf{a}_1(\bar{\omega}_0) \mathbf{a}_2(\bar{\omega}_0) \cdots \mathbf{a}_N(\bar{\omega}_0)]$, \mathbf{y} 为被表示信号, \mathbf{x} 为未知的表示系数, 矩阵 $\Phi \in \mathbb{R}^{N \times M}$ ($M < N$) 满秩, 为欠定方程组的求解问题。

为了得到欠定方程组(5)的唯一解, 可对 \mathbf{x} 加以稀疏性约束, 使得逼近原信号 \mathbf{y} 所需要的非零系数较少, 信号的表示方法较简化, 从而降低信号处理的成本, 并且使得方程组有唯一解。基于式(5)建立的优化表达式为

$$\min \{J(\mathbf{x}) \mid \Phi \mathbf{x} = \mathbf{y}\} \quad (6)$$

其中 $\mathbf{y} = \Phi \mathbf{x}$ 是约束条件, 取目标函数为 $J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$ 为目标函数。因为 $J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_1$ 是凸函数, 可得到全局的最优解。当 \mathbf{x} 为实数时, L_1 范数问题可以简单地转化成线性规划^[3] 问题来进行求解; 当 \mathbf{x} 为复数时, 可采用二阶锥规划求解。

2 基于 L_1 最小范数的二阶锥规划算法

2.1 基本的二阶锥规划问题

在凸优化中, 二阶锥规划形式^[4] 为

$$\begin{aligned} & \min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}^T \mathbf{x} \\ & \text{s. t. } \|\mathbf{A}_i \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\|_2 \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (7)$$

其中: $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 为自变量, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ 为常量, $\mathbf{A}_i \in \mathbb{R}^{(n_i-1) \times n}$, $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{n_i-1}$, $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$ 以及 $d_i \in \mathbb{R}$ 。式(7)中的约束为 n_i 维二阶锥约束^[5]。

所要优化的问题在有噪声情况下, 可以表示为

$$\min \|\mathbf{y} - \Phi \mathbf{x}\|_2 + \lambda \|\mathbf{x}\|_1 \quad (8)$$

其中: λ 是正则化参数, 它将噪声大小限定在了可允许的范围内。为了利用二阶锥规划算法求解式(8), 将式(8)用二阶锥规划表示为

$$\begin{aligned} & \min s + \lambda 1^T t \\ & \text{s. t. } \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x} \\ & \quad \|\mathbf{z}\|_2 \leq s \\ & \quad \|\text{Re}(x_i), \text{Im}(x_i)\|_2 \leq t_i, i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (9)$$

该问题是一个经典的凸优化问题, 采用 CVX 进行求解。最后得到的矩阵 \mathbf{x} 每一行的模值表示空间伪谱, 因此得到信号的波达方向估计^[5]。

2.2 基于 L_1 范数的二阶锥规划问题

1) 多帧联合稀疏表示

当获得多帧平稳的快拍数据时, 有

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{N} \quad (10)$$

其中: $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(t_1), \mathbf{y}(t_2), \dots, \mathbf{y}(t_L)]$ 是天线输出的多帧的数据矩阵, $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^L]$ 是该多帧信号的稀疏解矩阵, $\mathbf{N} = [\mathbf{n}^1, \mathbf{n}^2, \dots, \mathbf{n}^L]$ 是噪声.

与单帧信号相比,多帧联合的稀疏处理更加稳健,但是所需要的计算量会随着帧数呈超线性增加,不能满足实时化的波束方向 (DOA, direction of arrival) 估计需求.

为了解决这个问题,首先对多帧信号进行奇异值分解 (SVD) 并将观测数据转化到信号子空间上,只对信号子空间进行处理,由于目标源个数远小于快拍数,所以大大提高了计算效率.

对多帧信号模型进行奇异值分解后的结果为

$$\mathbf{Y} = \Phi \mathbf{X} + \mathbf{N} = \mathbf{U} \mathbf{L} \mathbf{V} \quad (11)$$

L_1 -SVD 所提取的数据表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{\text{SVD}} &= \mathbf{Y} \mathbf{V}^H \mathbf{D}_{K'} = \\ &\Phi \mathbf{X} \mathbf{V}^H \mathbf{D}'_K + \mathbf{N} \mathbf{V}^H \mathbf{D}'_K = \\ &\Phi \mathbf{X}_{\text{SVD}} + \mathbf{N}_{\text{SVD}} \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\mathbf{D}_{K'} = [\mathbf{I}_{K'}, \mathbf{0}_{K' \times (M-K')}]^T$. 降维后保持了原模型的稀疏性及稀疏结构,不影响其对信号方向的估计.

2) 欠定方程组求解

对降维后的数据 \mathbf{Y}_{SVD} 进行基于 L_1 范数最优化的稀疏重构问题构造:

$$\min_{\mathbf{X}_{\text{SVD}}} \|\tilde{\mathbf{X}}_{\text{SVD}}\|_{2,1} \quad \text{s. t.} \quad \|\hat{\mathbf{Y}}_{\text{SVD}} - \tilde{\Phi} \tilde{\mathbf{X}}_{\text{SVD}}\|_F \leq \varepsilon \quad (13)$$

其中 $\tilde{\mathbf{X}}_{\text{SVD}}$ 是 \mathbf{X}_{SVD} 行稀疏扩展^[5].

基于 L_1 范数最优化问题利用二阶锥规划表示为

$$\begin{aligned} \min & s + \lambda \mathbf{1}^T \mathbf{t} \\ \text{s. t.} & \mathbf{z} = \mathbf{Y}_{\text{SVD}} - \Phi \hat{\mathbf{X}}_{\text{SVD}} \\ & \|\mathbf{z}\|_2 \leq s \\ & \|\text{Re}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{SVD},i}), \text{Im}(\hat{\mathbf{X}}_{\text{SVD},i})\|_2 \leq t_i, i \in \{1, 2, \dots, N\} \end{aligned} \quad (14)$$

3) 二阶锥规划的算法流程

输入: 基矩阵 Φ , 采样矩阵 \mathbf{Y} ;

输出: \mathbf{X}_{SVD} 的逼近值 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{SVD}}$;

初始化: 正则化参数 $\lambda = 2$;

① 对多帧信号 \mathbf{Y} 进行 SVD, 并将观测数据转化到信号子空间上;

② 定义 CVX 类型参数 s 和 t ;

③ 根据式 (14) 在 CVX 中编写约束条件;

④ 通过 CVX 凸优化工具包对二阶锥规划问题进行求解, 得到满足约束条件的 $\hat{\mathbf{X}}_{\text{SVD}}$.

3 仿真结果

下面利用 10 阵元组成的均匀线性阵列对所提算法进行仿真, 并与经典的 MUSIC 算法^[6]、基于 L_0 范数的 OMP 算法^[7] 和基于 L_p 范数的最小方差算法^[8] 作对比来验证所提出方法的有效性.

实验基于 Matlab R2009b、3.19 GHz、1.96 GB RAM PC, 主要从算法的均方根误差、分辨力、成功概率以及相干的情况下的估计能力来进行研究.

3.1 均方根误差

DOA 估计精度是由均方根误差 (RMSE, root mean square error) 来衡量的, 定义为 $\sqrt{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}$, 其中 $\hat{\theta}_i$ 为第 i 次实验的估计角度.

如图 2(a) 所示, 考虑信噪比为 10 dB, 均方根误差随着快拍数的增加而减小, 其中迭代加权最小方差法在低快拍数的情况下估计误差较大, 二阶锥规划估计误差最小. 由图 2(b) 可知, 设定快拍数 200, 信噪比从 -10 dB 到 10 dB 变化. 估计均方根误差随着信噪比的增加而减小, 其中二阶锥规划方法在低信噪比的时候误差也较小.

3.2 可分辨次数

对可分辨进行定义: 在某次实验中, 若

$|\hat{\theta}_1 - \theta_1|$ 和 $|\hat{\theta}_2 - \theta_2|$ 都小于 $|\theta_1 - \theta_2|/2$ (其中 $\hat{\theta}_k$ 和 θ_k 分别表示第 k 个信号 DOA 的估计值与真实值), 则认为本次实验中的 2 个信号是可分辨的^[5]; 否则, 这 2 个信号不可分辨.

如图 3(a) 所示, 信噪比为 10 dB, 目标方向为 -10° 和 10° , 快拍数从 5 ~ 300 变化, 可分辨次数随着快拍数的增加而增加, 在快拍数较高的情况下呈现较好的分辨力, 其中基于二阶锥规划在低快拍数时也能得到较高的分辨力. 如图 3(b) 所示, 信噪比从 -20° ~ 20° 变化, 可分辨次数大体趋势随着信噪比的增加而增加. 在信噪比低于 0 dB 时, 由于噪声的影响较大, 可分辨次数出现高低起伏状态. 其中二阶锥规划算法在较低信噪比情况下也有较好的可分辨性能.

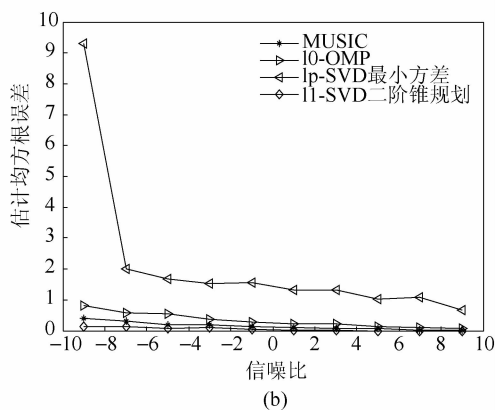
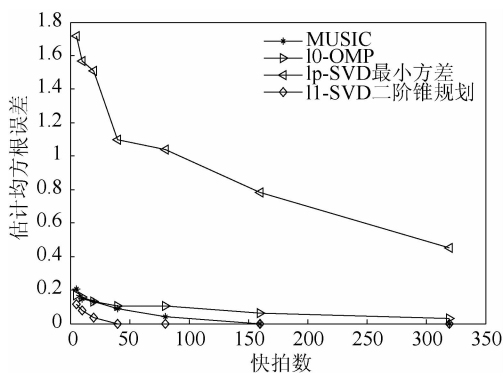


图 2 均方根误差变化

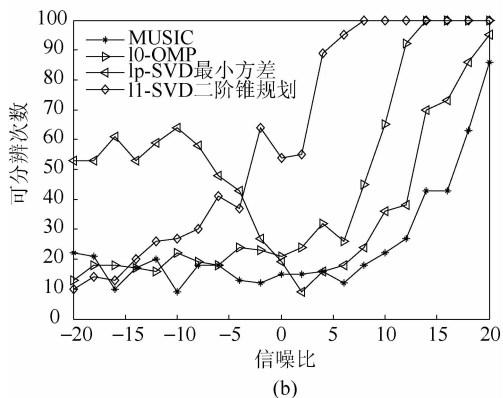
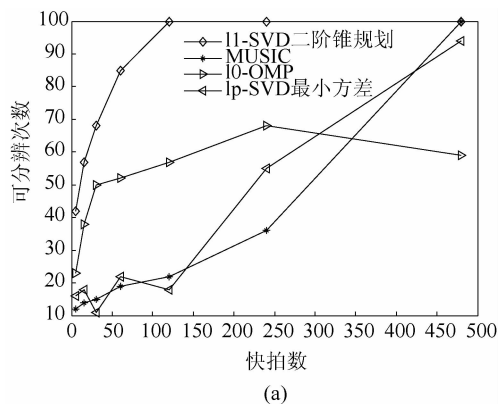


图 3 可分辨次数变化

3.3 成功概率

对成功概率定义为式(16),当 $\max(|\hat{\theta}_{i,k} - \theta_k|) < 1$ (这里, $\hat{\theta}_{i,k}$ 表示第 i 次实验的第 k 个信号的估计角度) 时认为第 i 次实验估计成功, 否则估计失败.

$$\text{PER} = \frac{\text{成功估计信号次数}}{\text{仿真总次数}} \quad (16)$$

如图 4(a) 所示, 信噪比为 10 dB, 目标方向为 -10° 和 10° , 快拍数从 5 ~ 300 变化. 成功概率随着快拍数的增加而增加, 其中二阶锥规划的算法和 MUSIC 算法在整个快拍数范围内的估计成功概率都接近 100%. 如图 4(b) 所示, 信噪比从 $-10^\circ \sim 10^\circ$ 变化. 成功概率随着信噪比的增加而增加, 其中二阶锥规划的算法在低信噪比的时候估计成功的概率都接近 100%.

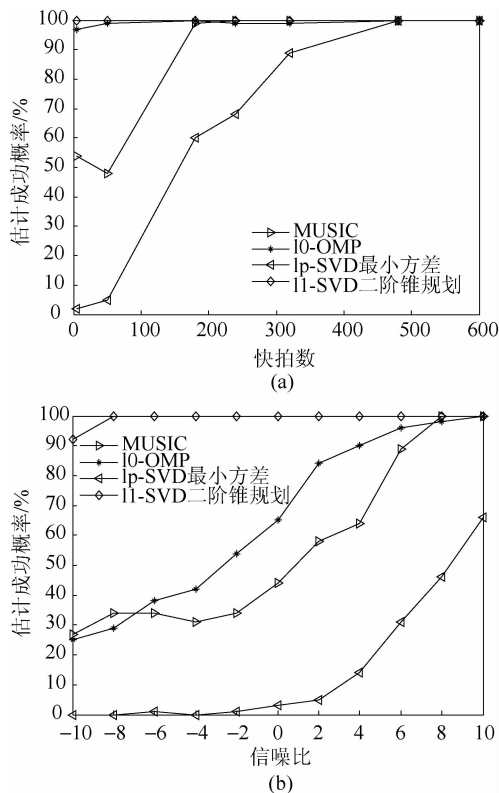


图 4 成功概率变化

3.4 相干信号

最后考虑相干信号的处理情况, 相干与不相干在信号上体现, 只要 2 个信号的频率不一样, 这 2 个信号就是不相干的. 2 个目标方向为 0° 和 5° 时, 如图 5 迭代加权最小方差法和二阶锥规划方法能够得到大致准确的估计结果, 而 MUSIC 算法和 OMP 算法估计明显不能分辨.

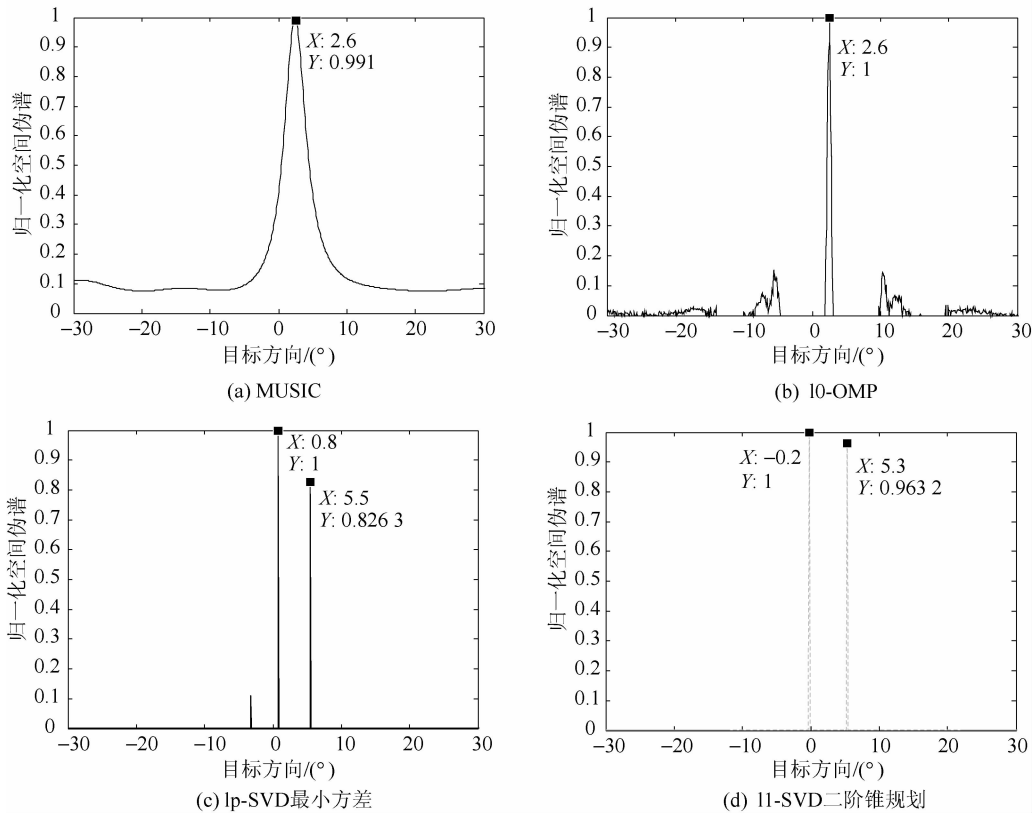


图5 入射角为 0° 和 5° 的相干信号的归一化空间伪谱

4 结束语

立足于窄带信号阵列输出的稀疏表示,对稀疏重构算法进行研究,提出了基于 L_1 范数的二阶锥归一化算法. 该算法首先对高维信号进行奇异值分解来降低计算的复杂度,再利用 CVX 进行二阶锥规划求解. 随后将该算法与传统的 MUSIC 算法及其他两种最小范数法的典型算法进行比较,验证了该算法的有效性. 仿真结果表明,二阶锥规划算法在较大的信噪比范围内都能取得较低的重构误差和较高的成功概率,对相关性较大的信号也能进行识别,能够求解多个信号源的情况.

参考文献:

- [1] 王永良, 陈辉, 彭应宁, 等. 空间谱估计理论与算法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2004: 1-30.
- [2] Elad M. Sparse and redundant representations; from theory to applications in signal and image processing [M]. New York: Springer-Verlag New York Inc, 2010: 3-76.
- [3] Gluhovsky, I. Multinomial least angle regression [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Sys-

tems, 2012, 23(1): 169-174.

- [4] Tang J, He G, Fang L. A new non-interior continuation method for second-order cone programming [J]. Journal of Numerical Mathematics, 2013, 21(4): 301-323.
 - [5] 胡南. 稀疏重构的阵列信号波达方向估计算法研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2013.
 - [6] Weber R J, Huang Yikun. Analysis for Capon and MUSIC DOA estimation algorithms [C] // IEEE: Antennas and Propagation Society International Symposium. IEEE: North Charleston, 2009.
 - [7] Tian Yumin, Wang Zhihui. An adaptive orthogonal matching pursuit algorithm based on redundancy dictionary [C] // 2013 10th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery. IEEE: Shenyang, 2013: 578-582.
 - [8] 徐鹏, 尧德中, 陈华富. 一种基于 L_p 模约束的 FOCUSS 迭代 EEG 源定位新方法 [J]. 电子学报, 2006, 34(1): 55-58.
- Xu Peng, Yao Dezhong, Chen Huaifu. A novel EEG source localization method based on FOCUSS iteration procedure combined with L_p norm sparse constraints [J]. Chinese Journal of Electronics, 2006, 34(1): 55-58.